

ROMUALD BLAZEIEVSKI

Sur un problème de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 14
(1895), p. 442-446

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__442_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. ROMUALD BLAZEJEVSKI.

Les inconnues $y_i = \frac{1-x_i}{D}$ satisfont à l'équation

$$(1) \quad s^3 - \frac{1}{D} s^2 + \frac{C(kD^2-1)}{D^2} s - \frac{C}{D^3} (kD^2 - lD^3 - 1) = 0.$$

Rappelons-nous l'équation

$$hD - 5 = \frac{y-1}{z-q} z - \frac{y^2 z}{q(y-1)}.$$

Cette équation peut être représentée sous une autre forme à l'aide des relations

$$z = \frac{1}{D\sqrt{k}} - \frac{1}{kD^3\sqrt{k}}, \quad q = \frac{l}{k^{\frac{3}{2}}}, \quad y-1 = C\left(k - \frac{1}{D^2}\right);$$

nous avons

$$(2) \quad hD - 5 = \frac{C(kD^2 - 1)^2}{D^2(kD^2 - 1 - lD^3)} - \frac{[D^2 + C(kD^2 - 1)]^2}{lCD^6}.$$

Les y_i ont une expression algébrique

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} \frac{t_1}{u_1}, & y_2 &= \frac{1}{2} \frac{f_2}{u_2}, & y_3 &= \frac{1}{2} \frac{t_3}{u_3}, \\ t_1 &= \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}, & t_2 &= \sqrt{\gamma} - \sqrt{\alpha}, & t_3 &= \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}, \\ u_1 &= \frac{\sqrt{\beta}}{m_2} - \frac{\sqrt{\gamma}}{m_3}, & & \dots \end{aligned}$$

Ainsi, si l'on désigne $A = u_1 u_2 u_3$, $B = \Sigma u_1 u_2 t_3$,
 $G = \Sigma u_1 t_2 t_3$, $D' = t_1 t_2 t_3$, on a

$$8As^3 - 4Bs^2 + 2Gs - D' = 0,$$

Appelons

$$\begin{aligned} U &= \Sigma m_1 (m_2 - m_3) \sqrt{\alpha}, \\ V &= \Sigma (m_2 - m_3) \sqrt{\alpha}, \\ W &= \Sigma \frac{m_2 - m_3}{m_1} \sqrt{\alpha}, \end{aligned}$$

on aura

$$(3) \quad \begin{cases} A = \frac{1}{l} (W - DV), & B = -\frac{1}{l} (DU + V), \\ G = \left(D - \frac{k}{l}\right) W - \frac{2}{l} U, & D' = \left(D - \frac{k}{l}\right) V. \end{cases}$$

En effet, les termes tels que $\sqrt{\alpha\beta}$, $\sqrt{\alpha\beta\gamma}$ disparaissent dans A, B, G, D'. Prenons par exemple G, nous avons de $u_1 t_2 t_3$ le terme $\frac{1}{m_2} \sqrt{\beta\gamma\alpha}$, mais $t_1 t_2 t_3$ donne ce même terme $-\frac{1}{m_2} \sqrt{\beta\gamma\alpha}$ avec le signe opposé; cherchons le facteur qui multiplie $\sqrt{\alpha}$, dans $u_1 t_2 t_3$; on a $u_1 (\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}) \sqrt{\alpha}$; le seul terme dépendant de $\sqrt{\alpha}$, dans $t_1 u_2 t_3$; on trouve $t_1 \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{m_3} + \frac{\sqrt{\beta}}{m_1}\right) \sqrt{\alpha}$; enfin $t_1 \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{m_1} + \frac{\sqrt{\beta}}{m_2}\right) \sqrt{\alpha}$

dans t_1, t_2, u_3 . Ainsi

$$G = \left[u_1(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}) + t_1 \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{m_3} + \frac{\sqrt{\beta}}{m_2} + \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}}{m_1} \right) \right] \sqrt{x} + \dots,$$

ou bien faisant la multiplication et substituant $m_1(D-a), m_2(D-b), m_3(D-c)$ aux symboles α, β, γ

$$\begin{aligned} G &= 2c - 2b + \frac{m_2(D-b) - m_3(D-c)}{m_1} \\ &= 2 \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_3} \right) + \frac{m_2 - m_3}{m_1} D - \frac{m_2 - m_3}{m_1^2} - \frac{1}{m_1} \left(\frac{m_2}{m_3} - \frac{m_3}{m_2} \right), \\ G &= (m_2 - m_3) \left(\frac{D}{m_1} - \frac{k}{lm_1} - \frac{2}{m_2 m_3} \right) \sqrt{x} \\ &= \left(D - \frac{k}{l} \right) \Sigma \frac{m_2 - m_3}{m_1} \sqrt{x} - \frac{2}{l} \Sigma m_1 (m_2 - m_3) \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Une grande simplicité dans les formules apparaît si l'on pose $lD^3 = (kD^2 - 1)x$; on a

$$\begin{aligned} C &= \frac{(lD - k)D^4}{4(kD^2 - 1) - 8lD^3} = \frac{(lD - k)D^4}{4(lD^2 - 1)(1 - 2x)}, \\ \frac{4C(kD^2 - 1)}{D^4} &= \frac{lD - k}{1 - 2x}, \\ \frac{8C(kD^2 - 1 - lD^3)}{D^5} &= \frac{2(lD - k)(1 - x)}{D(1 - 2x)}. \end{aligned}$$

Les équations (1) et (2) deviennent

$$(1') \quad s^3 - \frac{1}{D} s^2 + 4 \frac{lD - k}{1 - 2x} s - \frac{2(lD - k)(1 - x)}{D(1 - 2x)} = 0,$$

$$(2') \quad hD - 5 = -\frac{1}{4} \frac{D^2(lD - k)}{x(1 - x)} - \frac{2}{x} - \frac{4(1 - 2x)}{x(lD - k)D^2}.$$

D'après (3) nous avons

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2}{lD} (W - DV) &= -\frac{1}{l} (DU + V), \\ \frac{(lD - k)(W - DV)}{l(1 - 2x)} &= \frac{(lD - k)W - 2U}{l}, \\ \frac{2(lD - k)(1 - x)}{lD(1 - 2x)} (W - DV) &= \frac{(lD - k)V}{l}. \end{aligned} \right.$$

Séparant la solution $lD - k = 0$ qui exige des valeurs spéciales pour les données du problème, nous aurons

$$(4') \left\{ \begin{array}{l} D^2 U - DV + 2W = 0, \\ (lD - k)DV - 2x(lD - k)W - 2(1 - 2x)U = 0, \\ (3 - 4x)DV = 2(1 - x)W. \end{array} \right.$$

Mais les rapports égaux donnent

$$\frac{DV}{2(1-x)} = \frac{W}{3-4x} = \frac{DV-2W}{2(3x-2)} = \frac{D^2 U}{2(3x-2)}.$$

Ainsi, comme les équations (4) sont homogènes, on leur satisfera, substituant aux U, V, W les valeurs proportionnelles

$$D^2(lD - k) \left[3 - 4x - \frac{3 - 4x - 2(1-x)}{(1-2x)} \right] = 4(3x - 2)$$

ou bien

$$(5) \quad D^2(lD - k)(1 - 2x) - 2(3x - 2) = 0,$$

par la transformation à l'aide de $lD^3 = (kD^2 - 1)x$,

$$\begin{aligned} (1 - 2x)[(kD^2 - 1)x - kD^2] - 2(3x - 2) &= 0, \\ (x - 1)(2x - 1)kD^2 &= 2x^2 - 7x + 4, \end{aligned}$$

$$(6) \quad kD^2 = \frac{2x^2 - 7x + 4}{(x - 1)(2x - 1)},$$

$$(5') \quad \left\{ \begin{array}{l} (lD - k)(1 - 2x) \frac{2x^2 - 7x + 4}{(x - 1)(2x - 1)} = 2k(3x - 2), \\ (lD - k)(2x^2 - 7x + 4) = 2k(2 - 3x); \end{array} \right.$$

enfin, séparant le terme en D ,

$$(7) \quad (2x^2 - 7x + 4)lD = 4x(3 - 4x)k.$$

Nous ne pousserons pas plus loin l'élimination de l'inconnue D . Évidemment, les équations contenant k et l ne satisfont pas à la question générale, car k, l peuvent varier séparément de h . L'équation finale sera, au plus, du degré six en x .

Éliminant kD^2 et D au moyen de (6), (7), nous aurons

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{hk}{l(2x^2 - 7x + 4)} - 5 \\ &= \frac{3x - 2}{2x(1-x)(2x-1)} - \frac{2}{x} + \frac{2(2x-1)^2}{x(2-3x)}. \end{aligned} \right.$$

En effet, un calcul un peu laborieux, mais facile, donne cette formule. En chassant les dénominateurs, on a successivement

$$\begin{aligned} & \frac{hk}{l(2x^2 - 7x + 4)} \\ &= \frac{(3x-2)2(2-3x) - (2+5x)2(1-x)(2x-1)(2-3x) + 2^2(1-x)(2x-1)^3}{2x(1-x)(2-x)(2x-1)(2-3x)}, \end{aligned}$$

l'équation sera au plus du degré six.

Ainsi, en adjoignant les solutions singulières, résultant des équations (6) et (7),

$$l^2(2x^2 - 7x + 4)^3 = k^3x^2(4x - 3)^2(x - 1)(2x - 1)$$

et la solution

$$lD - k = 0,$$

nous avons la certitude que, procédant d'une manière ordinaire à la recherche de l'équation en D , nous aurions une équation du douzième degré.