

ROMUALD BLAZEÏEVSKI

Sur un problème de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 14
(1895), p. 385-391

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__385_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. ROMUALD BLAZEJEVSKI.

L'équation

$$(1 - nyD)y_1^2 + m_1y_1 - \frac{1}{4}(k - lD) = 0$$

et les deux autres qu'on obtient en changeant m_1y_1 en

Ann. de Mathémat., 3^e série, t. XIV. (Septembre 1895.) 27

$m_2 \gamma_2, m_3 \gamma_3$ donnent pour γ_i les expressions contenant les radicaux $\sqrt{D-a}, \sqrt{D-b}, \sqrt{D-c}$. Posons, pour abréger,

$$\begin{aligned} m_1(D-a) &= \alpha, & m_2(D-b) &= \beta, & m_3(D-c) &= \gamma, \\ F_0 &= \sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}, & F_1 &= \sqrt{\gamma} - \sqrt{\alpha}, & F_2 &= \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}; \\ G_0 &= \frac{1}{m_2} \sqrt{\beta} - \frac{1}{m_3} \sqrt{\gamma}, & G_1 &= \dots, & G_2 &= \dots, \end{aligned}$$

désignons par F', G' les F et les G où le signe moins est remplacé par le signe plus.

Nous aurons

$$\begin{aligned} F_0 F'_0 &= m_2(D-b) - m_3(D-c), \\ G_0 G'_0 &= \frac{D-b}{m_2} - \frac{D-c}{m_3} \end{aligned}$$

ou bien

$$1 - m_1 D = \frac{l}{m_2 - m_3} G_0 G'_0, \quad D l - k = \frac{l}{m_2 - m_3} F_0 F'_0.$$

L'équation déterminant γ_1 sera

$$l G_0 G'_0 \gamma_1^2 + m_1(m_2 - m_3) \gamma_1 + \frac{1}{4} l F_0 F'_0 = 0.$$

Soit A une constante numérique, faisons

$$G_0 \gamma_1 = A F_0,$$

substituons dans l'équation et divisons le premier membre par $F_0 G_0$, on trouve

$$A^2 l F_0 G'_0 + m_1(m_2 - m_3) A + \frac{1}{4} l G_0 F'_0 = 0;$$

mais

$$\begin{aligned} F_0 G'_0 &= (\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}) \left(\frac{1}{m_2} \sqrt{\beta} + \frac{1}{m_3} \sqrt{\gamma} \right) \\ &= \left(\frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_2} \right) (-1 + \sqrt{\beta\gamma}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_0 F'_0 &= \left(\frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_2} \right) (-1 - \sqrt{\beta\gamma}) - (A^2 + \frac{1}{4}) \left(\frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_2} \right) \\ &\quad + (A^2 - \frac{1}{4}) \sqrt{\beta\gamma} \left(\frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_2} \right) + m_1(m_2 - m_3) = 0. \end{aligned}$$

Pour satisfaire à cette équation, supposons $A = \pm \frac{1}{2}$,
ainsi

$$y_1 = \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}}{\frac{\sqrt{\beta}}{m_2} - \frac{\sqrt{\gamma}}{m_3}},$$

de même on pourrait constater que

$$y_2 = \pm \frac{1}{2} \frac{\frac{\sqrt{\gamma}}{m_3} - \frac{\sqrt{\alpha}}{m_2}}{\frac{\sqrt{\gamma}}{m_3} - \frac{\sqrt{\alpha}}{m_2}}, \quad y_3 = \pm \frac{1}{2} \frac{\frac{\sqrt{\alpha}}{m_1} - \frac{\sqrt{\beta}}{m_2}}{\frac{\sqrt{\alpha}}{m_1} - \frac{\sqrt{\beta}}{m_2}}.$$

Les y sont liés par la relation

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{D},$$

équation rationnelle et homogène par rapport à $\sqrt{\alpha}$,
 $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$,

$$F_0 G_1 G_2 + F_1 G_0 G_2 + F_2 G_0 G_1 = \frac{2}{D} G_0 G_1 G_2$$

Mais

$$\begin{aligned} G_1 G_2 &= \frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{m_1 m_3} - \frac{\alpha}{m_1^2} - \frac{\sqrt{\beta\gamma}}{m_2 m_3}, \\ F_0 G_1 G_2 - (c - b) \frac{\sqrt{\alpha}}{m_1} - \left(\frac{D - c}{m_2} - \frac{D - a}{m_1} \right) \sqrt{\beta} \\ &\quad + \left(\frac{D - a}{m_1} - \frac{D - b}{m_2} \right) \sqrt{\gamma} + \left(\frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_2} \right) \frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{m_1}, \\ F_1 G_0 G_2 &= (a - c) \frac{\sqrt{\beta}}{m_2} + \left(\frac{D - a}{m_3} - \frac{D - b}{m_2} \right) \sqrt{\gamma} \\ &\quad - \left(\frac{D - b}{m_2} - \frac{D - c}{m_3} \right) \sqrt{\alpha} + \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_3} \right) \frac{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{m_2}, \\ F_2 G_0 G_1 &= (b - a) \frac{\sqrt{\gamma}}{m_3} + \dots, \\ G_0 G_1 G_2 &= \left(\frac{D - b}{m_2} - \frac{D - c}{m_3} \right) \frac{\sqrt{\alpha}}{m_1} \\ &\quad + \left(\frac{D - c}{m_3} - \frac{D - a}{m_2} \right) \frac{\sqrt{\beta}}{m_2} \\ &\quad + \left(\frac{D - a}{m_1} - \frac{D - b}{m_2} \right) \frac{\sqrt{\gamma}}{m_3}. \end{aligned}$$

L'équation sera

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} (m_3 - m_2) \left(m_1 D^2 - D + \frac{2}{m_1} \right) \sqrt{\alpha} \\ + (m_1 - m_3) \left(m_2 D^2 - D + \frac{2}{m_2} \right) \sqrt{\beta} \\ + (m_2 - m_1) \left(m_3 D^2 - D + \frac{2}{m_3} \right) \sqrt{\gamma} = 0. \end{array} \right.$$

Comme il est facile de se convaincre, le facteur de $\sqrt{\alpha}$ est

$$\frac{c-b}{m_1} + \frac{D-b}{m_2} - \frac{D-c}{m_1} \\ + \frac{D-b}{m_1} - \frac{D-c}{m_3} - \frac{2}{m_1 D} \left(\frac{D-b}{m_2} - \frac{D-c}{m_3} \right),$$

ou bien

$$\frac{2(c-b)}{m_1} + \left(1 - \frac{2}{m_1 D} \right) \left(\frac{D-b}{m_2} - \frac{D-c}{m_3} \right),$$

mais

$$\frac{c}{m_3} - \frac{b}{m_2} = c \left(\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1} \right) - b \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) - \frac{c-b}{m_1} = \frac{b-c}{m_1};$$

le facteur de $\sqrt{\alpha}$ est

$$2 \frac{c-b}{m_1} + (c-b) \left(1 - \frac{2}{m_1 D} \right) \left(D - \frac{1}{m_1} \right),$$

qu'on peut écrire

$$\frac{m_3 - m_2}{l D} \left(\frac{2}{m_1} - D + m_1 D^2 \right).$$

On a pris dans l'expression

$$y_1 = \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}}{\frac{\sqrt{\beta}}{m_2} - \frac{\sqrt{\gamma}}{m_3}}$$

le signe supérieur.

Toutes les combinaisons de signes sont au nombre

de quatre, car $G'_0 \gamma_1 = \frac{1}{2} F'_0$ est aussi une solution, mais peut-être y a-t-il quelques conditions limitant le nombre de solutions.

L'analyse précédente nous enseigne que le problème dépend seulement de $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\gamma}}, \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\gamma}}$. Si l'on suppose, M, N étant des constantes,

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\gamma}} = M \cos \theta, \quad \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\gamma}} = N \sin \theta,$$

on peut exprimer les quantités γ_i par les fonctions trigonométriques et l'argument θ sera déterminé par l'équation (E) : il se peut que θ soit complexe, de la forme $\theta' + \theta'' i$; cela introduira les fonctions hyperboliques.

Nous avons

$$\begin{aligned} m_1(D - a) &= M^2 m_3(D - c) \cos^2 \theta, \\ m_2(D - b) &= N^2 m_3(D - c) \sin^2 \theta; \end{aligned}$$

on doit avoir l'identité, quel que soit D,

$$\begin{aligned} N^2 m_1(D - a) + M^2 m_2(D - b) &= M^2 N^2 m_3(D - c), \\ m_1 N^2 + m_2 M^2 &= m_3 M^2 N^2, \\ m_1 a N^2 + m_2 b M^2 &= M^2 N^2 m_3 c, \\ M^2 &= \frac{m_1(b - a)}{m_3(b - c)}, \quad N^2 = \frac{m_2(b - a)}{m_3(c - a)}. \end{aligned}$$

Pour que la substitution soit réelle, il faut qu'on ait

$$b > c > a,$$

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} > \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} > \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3},$$

ou bien

$$m_1 < m_2 < m_3,$$

ou bien

$$w_1 < w_2 < w_3.$$

En disposant les données du problème dans un tel ordre, on est assuré que M, N sont réels.

Je vais ajouter quelques remarques au sujet de l'élimination. Soit C le cercle circonscrit au triangle cherché; nous avons posé

$$h D^2 = \frac{1}{x^2}, \quad l D^3 = \frac{q}{x^3}, \quad D x = q_0;$$

on a

$$h q_0^2 = 1, \quad l q_0^3 = q, \quad q = \frac{l}{k^{\frac{3}{2}}};$$

les x_i satisfont à l'équation

$$t^3 - 2 t^2 + y t - \frac{q}{z} (y - 1) = 0.$$

Supposons que w_i varient de façon que les cercles inscrit et circonscrit au triangle $A_1 A_2 A_3$ restent invariables. On a

$$z_1 \zeta_1 = z_2 \zeta_2 = z_3 \zeta_3 = \frac{w_1 w_3 w_2}{D} x_1 x_2 x_3 = C,$$

en désignant par C une constante indépendante de $w_1 w_2 w_3$, comme

$$l = m_1 m_2 m_3 = \frac{w_1 w_2 w_3}{w_2 w_3 \cdot w_1 w_3 \cdot w_1 w_2} = \frac{1}{w_1 w_2 w_3},$$

on a

$$x_1 x_2 x_3 = l CD.$$

Ainsi

$$\frac{q}{z} (y - 1) = l CD,$$

mais

$$z = x - x^3 = \frac{q_0}{D} - \frac{q_0^3}{D^3} = \frac{q_0}{D} \left(1 - \frac{1}{k D^2} \right),$$

$$y - 1 = \frac{l}{q} CD \left(1 - \frac{1}{k D^2} \right) \frac{q_0}{D} = C \left(k - \frac{1}{D^2} \right);$$

C est une fonction rationnelle de D; je ne cite pas ici la démonstration de la formule

$$C = \frac{(lD - k) D^4}{4(kD^2 - 1) - 8lD^3}$$

(391)

qui ne présente aucune difficulté, mais est seulement assez longue, comme toutes celles fondées sur la théorie des fonctions symétriques.