

VAHLEN

Sur la surface de Fresnel

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 14
(1895), p. 344-347

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__344_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA SURFACE DE FRESNEL;

PAR M. LE D^r VAHLEN.

Nous cherchons l'équation de la surface de Fresnel pour n dimensions.

La variété ellipsoïdale $\mathcal{F}$, définie par l'équation

$$\sum_i a_i x_i^2 = 1, \quad (i = 1, \dots, n)$$

est coupée par une variété plane $\mathcal{C}$ de $n - 1$ dimensions, passant par le centre de $\mathcal{F}$. Nous élevons des perpendiculaires sur $\mathcal{C}$ au centre, égales aux demi-axes principaux de la variété ellipsoïdale Φ , commune à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$. En variant $\mathcal{C}$, les points extrêmes de ces perpendiculaires décrivent la variété de Fresnel, dont nous voulons établir l'équation.

Nous transformons l'équation de $\mathcal{F}$ par la substitution orthogonale

$$x_i = \sum_k x_{ik} \xi_k, \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Soit $\xi_x = 0$ l'équation de la variété plane $\mathcal{C}$, l'équa-

tion de Φ sera

$$\sum_{i,k} \xi_i \xi_k \sum_h a_h x_{hi} x_{hk} = 1 \quad \left(\begin{matrix} i, k = 1, \dots, n-1 \\ h = 1, \dots, n \end{matrix} \right).$$

En désignant par α le carré inverse d'un demi-axe principal de Φ , les $n-1$ valeurs de α sont les racines de l'équation de Laplace, ici de l'équation

$$\left| \sum_h a_h x_{hi} x_{hk} - \delta_{ik} \alpha \right| = 0 \quad \left(\begin{matrix} h = 1, \dots, n \\ i, k = 1, \dots, n-1 \\ \delta_{ik} = 0, \delta_{ii} = 1 \end{matrix} \right).$$

Ordonnée suivant les puissances de α , cette équation s'écrira

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\substack{h \\ i, k \neq n}} a_h x_{hi} x_{hk} \right| - \alpha \sum_{n_1=1}^n \left| \sum_{\substack{h \\ i, k \neq n, n_1}} a_h x_{hi} x_{hk} \right| \\ & + \alpha^2 \sum_{\substack{n_1, n_2=1 \\ i, k \neq n, n_1, n_2}}^n \left| \sum_h a_h x_{hi} x_{hk} \right| - \dots (-1)^{n-1} \alpha^{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Nous appliquons le théorème de Cauchy, concernant la somme des carrés des déterminants d'un système oblong et nous obtenons

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_h} x_{hi} \Big|_{\substack{i \neq n \\ n_1=1}}^2 - \alpha \sum_{\substack{i \neq n, n_1}} |\sqrt{a_h} x_{hi}|^2 \\ & + \alpha^2 \sum_{\substack{n_1, n_2=1 \\ i \neq n, n_1, n_2}}^n |\sqrt{a_h} x_{hi}|^2 - \dots (-1)^{n-1} \alpha^{n-1} = 0 \quad (h, i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Au moyen d'un théorème connu sur les subdéterminants de systèmes orthogonaux ⁽¹⁾, l'équation se trans-

(1) Si (α_{ik}) , $(i, k = 1, \dots, n)$ est un système orthogonal, le carré d'une matrice du système est égal au carré de la matrice adjointe; par exemple,

$$|\alpha_{ik}|^2 \left(\begin{matrix} i = 1, \dots, \nu \\ k = \mu + 1, n \end{matrix} \right) = |\alpha_{ik}|^2 \left(\begin{matrix} l = \nu + 1, \dots, n \\ k = 1, \dots, \mu \end{matrix} \right).$$

formera dans la suivante :

$$\sum_{h=1}^n \frac{x_{hn}^2}{a_h} - \alpha \sum_{\substack{h_1, h_2=1 \\ h_1 < h_2}}^n \frac{x_{h_1 n}^2 + x_{h_2 n}^2}{a_{h_1} a_{h_2}} \\ + \alpha^2 \sum_{\substack{h_1, h_2, h_3=1 \\ h_1 < h_2 < h_3}}^n \frac{x_{h_1 n}^2 + x_{h_2 n}^2 + x_{h_3 n}^2}{a_{h_1} a_{h_2} a_{h_3}} - \dots (-1)^{n-1} \alpha^{n-1} \frac{\sum_{h=1}^n x_{hn}^2}{a_1 a_2 \dots a_n} = 0.$$

Posons

$$x_{in} = \sqrt{\alpha} \cdot \xi_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

les variables ξ_i sont les coordonnées du point extrême du demi-axe principal $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, normal à $\mathcal{C}$ au centre; et l'équation de la variété de Fresnel devient

$$\sum_{h=1}^n \frac{\xi_h^2}{a_h} - \alpha \sum_{\substack{h_1, h_2=1 \\ h_1 < h_2}}^n \frac{\xi_{h_1}^2 + \xi_{h_2}^2}{a_{h_1} a_{h_2}} \\ + \alpha^2 \sum_{\substack{h_1, h_2, h_3=1 \\ h_1 < h_2 < h_3}}^n \frac{\xi_{h_1}^2 + \xi_{h_2}^2 + \xi_{h_3}^2}{a_{h_1} a_{h_2} a_{h_3}} - \dots (-1)^{n-1} \alpha^{n-1} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} = 0.$$

Dans cette équation, $\frac{\xi_h^2}{a_h}$ est multiplié par

$$1 - \sum_{h_1=1}^n \frac{\alpha}{a_{h_1}} + \sum_{h_1, h_2=1}^n \frac{\alpha^2}{a_{h_1} a_{h_2}} - \dots (-1)^{n-1} \sum_{h_1, h_2, \dots, h_{n-1}=1}^n \frac{\alpha^{n-1}}{a_{h_1} a_{h_2} \dots a_{h_{n-1}}}, \\ (h_1, h_2, \dots, h_{n-1} \neq h),$$

c'est-à-dire par

$$\frac{\prod_i \left(1 - \frac{\alpha}{a_i}\right)}{1 - \frac{\alpha}{a_h}} \quad (i = 1, \dots, n).$$

C'est par cette remarque que l'équation se réduira à celle-ci :

$$\sum_h \frac{\xi_h^2}{a_h - \alpha} = 0 \quad (h = 1, \dots, n).$$

A l'aide de l'identité

$$\alpha \sum_h \xi_h^2 = 1, \quad \text{ou} \quad \sum_h \left(\frac{a_h \alpha}{a_h - \alpha} - \frac{\alpha^2}{a_h - \alpha} \right) \xi_h^2 = 1 \quad (h = 1, \dots, n),$$

l'équation prendra la forme finale

$$\sum_h \frac{\xi_h^2}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a_h}} = 1.$$

En supposant l'équation de $\hat{\mathcal{F}}$ donnée dans la forme

$$\sum_h \frac{x_h^2}{c_h^2} = 1 \quad (h = 1, \dots, n),$$

l'équation de la variété de Fresnel sera

$$\sum_h \frac{\xi_h^2}{\sum_i \xi_i^2 - c_h^2} = 1 \quad (h, i = 1, \dots, n).$$