

P. SONDAT

Sur quelques propriétés des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 14
(1895), p. 309-329

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__309_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

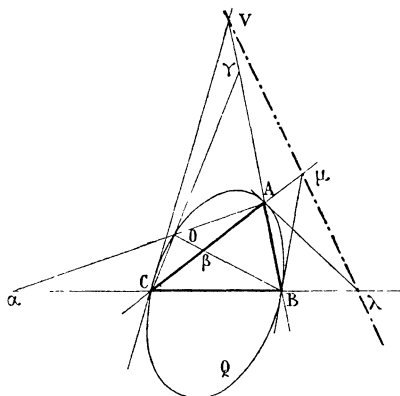
SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES;

PAR M. P. SONDAT.

1. Comme applications d'une Note insérée dans les *Nouvelles Annales* (1893, p. 360), je me propose de démontrer quelques propriétés des coniques.

Je rappelle d'abord que si un point $O(\alpha, \beta, \gamma)$, rapporté, en coordonnées *segmentaires*, à un triangle de

Fig. 1.



référence ABC, appartient à une droite $X(\lambda, \mu, \nu)$, l'équation

$$(1) \quad \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu} = 1$$

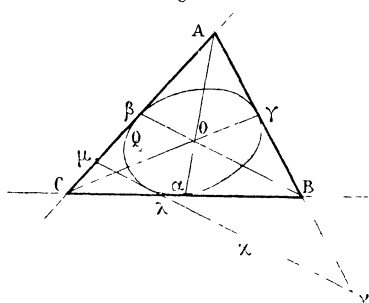
est à la fois celle de X en coordonnées *ponctuelles*, et celle de O en coordonnées *tangentielles*.

Si le point O cesse d'appartenir à X , l'équation

$$(2) \quad \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1$$

représente aussi, en coordonnées ponctuelles, si X est fixe, la conique Q (fig. 1) tangente en A, B, C aux droites $A\lambda, B\mu, C\nu$, et, en coordonnées tangentielles, si O est fixe, la conique Q_1 (fig. 2) inscrite à ABC en α, β, γ .

Fig. 2.



Nous dirons que la conique Q est circonscrite à ABC selon la droite X , et que la conique Q_1 est inscrite selon le point O .

2. Le lieu du point O pour lequel Q_1 admet la tangente fixe x est la conique Q circonscrite selon cette droite, et, corrélativement, l'enveloppe de X , pour laquelle Q passe par le point fixe O , est la conique Q_1 inscrite selon ce point. Ainsi le lieu du point O , pour lequel Q_1 est une parabole, est l'ellipse circonscrite à ABC selon la droite à l'infini, et l'enveloppe de la droite X , pour laquelle Q passe par le centre de gravité de ABC , est l'ellipse inscrite selon ce centre.

3. Soit $O(\alpha, \beta, \gamma)$ un point lié à la droite $X(\lambda, \mu, \nu)$ par l'équation

$$(\lambda - \alpha)(\mu - \beta)(\nu - \gamma) + 1 = 0.$$

En vertu des égalités

$$\lambda\mu\nu = +1, \quad \alpha\beta\gamma = -1,$$

cette équation peut s'écrire

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu} - 1\right) \left(\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} - 1\right) = 0,$$

et se décompose en celles-ci

$$\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu} = 1, \quad \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1.$$

Donc (1)

1° Avec X fixe, O appartient à X ou à Q ;

2° Avec O fixe, X enveloppe O ou Q_1 .

Comme les triangles αCA , βAB , γBC , coupés par les droites $BO\beta$, $CO\gamma$, $AO\alpha$, donnent

$$\frac{OA}{O\alpha} = \gamma(1-\alpha), \quad \frac{OB}{O\beta} = \alpha(1-\beta), \quad \frac{OC}{O\gamma} = \beta(1-\gamma),$$

le lieu du point O pour lequel

$$OA \cdot OB \cdot OC = O\alpha \cdot O\beta \cdot O\gamma$$

aura pour équation

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) + 1 = 0,$$

c'est-à-dire sera, avec la droite à l'infini (111), l'ellipse circonscrite à ABC selon cette droite.

4. Coupons la conique Q par la droite $X_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ la rencontrant aux points $O(\alpha, \beta, \gamma)$ et $O_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$. Comme O appartient à X_1 et à Q , on a (1)

$$\frac{\lambda_1}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu_1} = 1, \quad \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1,$$

et, en éliminant β ,

$$(1) \quad \alpha^2 - \left(\lambda + \lambda_1 - \frac{\lambda\mu}{\mu_1} \right) \alpha + \lambda\lambda_1 = 0.$$

Or les racines de cette équation convenant à O et O_1 ,

on a

$$(5) \quad \alpha x_1 = \lambda \lambda_1, \quad \text{et de même} \quad \beta \beta_1 = \mu \mu_1, \quad \gamma \gamma_1 = \nu \nu_1.$$

Si X_1 est une tangente, O_1 se confond avec O , et l'on a, pour ce point de contact,

$$(6) \quad \alpha^2 = \lambda \lambda_1, \quad \beta^2 = \mu \mu_1, \quad \gamma^2 = \nu \nu_1,$$

L'équation (2), qui devient alors

$$(7) \quad \pm \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \pm \sqrt{\frac{\mu}{\mu_1}} = 1,$$

est celle de Q en coordonnées tangentielles, et exprime, sous sa forme rationnelle

$$(8) \quad \left(\lambda + \lambda_1 - \frac{\lambda \mu}{\mu_1} \right)^2 - 4 \lambda \lambda_1 = 0,$$

que les racines de (4) sont égales.

5. THÉORÈME. — *Si sur la conique Q , circonscrite à ABC selon la droite $X(\lambda, \mu, \nu)$, on prend trois points $A_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $B_1(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $C_1(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, le triangle $A_1 B_1 C_1$ sera circonscrit à la conique Q_1 , inscrite à ABC selon le point $O(\alpha, \beta, \gamma)$, ayant pour coordonnées*

$$\alpha = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\lambda^2}, \quad \beta = \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{\mu^2}, \quad \gamma = \frac{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}{\nu^2}.$$

Soient, en effet, $a_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $b_1(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, $c_1(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$ les côtés de $A_1 B_1 C_1$. On a (4)

$$\begin{cases} \alpha_2 \alpha_3 = \lambda \lambda_1, & \alpha_1 \alpha_3 = \lambda \lambda_2, & \alpha_1 \alpha_2 = \lambda \lambda_3, \\ \beta_2 \beta_3 = \mu \mu_1, & \beta_1 \beta_3 = \mu \mu_2, & \beta_1 \beta_2 = \mu \mu_3, \\ \gamma_2 \gamma_3 = \nu \nu_1, & \gamma_1 \gamma_3 = \nu \nu_2, & \gamma_1 \gamma_2 = \nu \nu_3. \end{cases}$$

Or le point A_1 appartenant à Q , on a (1)

$$\frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta_1} = 1,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\lambda^2} : \frac{\alpha_3 \alpha_3}{\lambda} + \frac{\beta_2 \beta_3}{\mu} : \frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{\mu^2} = 1$$

ou

$$\frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\beta} = 1,$$

c'est-à-dire (1) que a_1 enveloppe Q_1 .

On prouverait de même que b_1 et c_1 sont des tangentes à Q_1 .

Remarque. — Si les points A_1, B_1, C_1 sont ceux où les droites qui joignent un point $\omega(x, y, z)$ de X aux sommets A, B, C , coupent Q , on aura

$$A_1 \left(x, \frac{\mu z}{\nu}, \frac{\nu y}{\mu} \right), \quad B_1 \left(\frac{\lambda z}{\nu}, y, \frac{\nu x}{\lambda} \right), \quad C_1 \left(\frac{\lambda y}{\mu}, \frac{\mu x}{\lambda}, z \right).$$

Il résulte de là que

$$\alpha = -\lambda, \quad \beta = -\mu, \quad \gamma = -\nu,$$

ou O est le pôle de X (triangle ABC).

De plus, on a les trois systèmes homologiques

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ C_1 & A_1 & B_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ B_1 & C_1 & A_1 \end{vmatrix},$$

dont les centres appartiennent à X , et dont les axes passent par O .

6. Menons à la conique Q_1 les tangentes $X(\lambda, \mu, \nu)$ et $X_1(\lambda_1, \mu, \nu_1)$, partant d'un point $O_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$. Comme X enveloppe O_1 et Q_1 , on a (1)

$$\frac{\lambda}{\alpha_1} + \frac{\beta_1}{\mu} = 1, \quad \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1,$$

et, en éliminant μ ,

$$(9) \quad \lambda^2 - \left(\alpha + \alpha_1 - \frac{\alpha_1 \beta_1}{\beta} \right) \lambda + \alpha \alpha_1 = 0,$$

et comme les racines de cette équation conviennent à X et X_1 ,

$$(10) \quad \lambda\lambda_1 = \alpha\alpha_1, \quad \text{et de même,} \quad \mu\mu_1 = \beta\beta_1, \quad \nu\nu_1 = \gamma\gamma_1.$$

Si O_1 se porte sur Q_1 , X_1 se superpose à X , et l'on a, pour cette tangente,

$$(11) \quad \lambda^2 = \alpha\alpha_1, \quad \mu^2 = \beta\beta_1, \quad \nu^2 = \gamma\gamma_1,$$

L'équation (2), qui devient alors

$$(12) \quad \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1}} \pm \sqrt{\frac{\beta}{\beta_1}} = 1,$$

est celle de Q_1 en coordonnées ponctuelles, et exprime, sous sa forme rationnelle

$$(13) \quad \left(\alpha + \alpha_1 - \frac{\alpha_1\beta_1}{\beta} \right)^2 - 4\alpha\alpha_1 = 0,$$

que les racines de (9) sont égales.

7. THÉORÈME. — *Si à la conique Q_1 inscrite à ABC selon le point $O(x, \beta, \gamma)$, on mène trois tangentes $a_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $b_1(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, $c_1(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$, le trilatère $a_1b_1c_1$ sera inscrit dans la conique Q circonscrite à ABC selon la droite $X(\lambda, \mu, \nu)$, ayant pour coordonnées*

$$\lambda = \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\alpha^2}, \quad \mu = \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\beta^2}, \quad \nu = \frac{\nu_1\nu_2\nu_3}{\gamma^2}.$$

Soient, en effet, $A_1(x_1, \beta_1, \gamma_1)$, $B_1(x_2, \beta_2, \gamma_2)$, $C_1(x_3, \beta_3, \gamma_3)$ les sommets de $a_1b_1c_1$. On a (6)

$$\begin{cases} \lambda_2\lambda_3 = \alpha\alpha_1, & \lambda_1\lambda_3 = \alpha\alpha_2, & \lambda_1\lambda_2 = \alpha\alpha_3, \\ \mu_2\mu_3 = \beta\beta_1, & \mu_1\mu_3 = \beta\beta_2, & \mu_1\mu_2 = \beta\beta_3, \\ \nu_2\nu_3 = \gamma\gamma_1, & \nu_1\nu_3 = \gamma\gamma_2, & \nu_1\nu_2 = \gamma\gamma_3. \end{cases}$$

Or la droite a_1 étant tangente à Q_1 , on a (1)

$$\frac{\alpha}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\beta} = 1,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\lambda_2 \lambda_3}{\alpha} : \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{\alpha^2} + \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{\beta^2} : \frac{\mu_2 \mu_3}{\beta} = 1$$

ou

$$\frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta_1} = 1,$$

c'est-à-dire (1) que A_1 est sur Q .

On prouverait de même que B_1 et C_1 appartiennent à Q .

Remarque. — Si a_1 , b_1 , c_1 sont les tangentes à Q_1 , menées par les points où une droite $\rho(x, y, z)$, passant par O , coupe les côtés de ABC , on a

$$a_1 \left(x, \frac{\beta z}{\gamma}, \frac{\gamma y}{\beta} \right), \quad b_1 \left(\frac{\alpha z}{\gamma}, y, \frac{\gamma x}{\alpha} \right), \quad c_1 \left(\frac{\alpha y}{\beta}, \frac{\beta x}{\alpha}, z \right).$$

Il en résulte que $\lambda = -z$, $\mu = -\beta$, $\nu = -\gamma$, ou X est la polaire de O .

De plus, on a les trois systèmes homologues

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ C_1 & A_1 & B_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ B_1 & C_1 & A_1 \end{vmatrix},$$

et il est facile de voir que les trois axes passent par O et que les trois centres se trouvent sur X .

8. THÉORÈME. — *Étant données la conique Q circonscrite à ABC selon la droite $X(\lambda, \mu, \nu)$ et la conique Q_1 inscrite selon le point $O(x, \beta, \gamma)$, il existe une infinité de triangles inscrits dans Q et circonscrits à Q_1 .*

Soit $A_1 B_1 C_1$ un triangle inscrit dans Q ; il sera circonscrit à Q_1 si l'on a (théorème V),

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \alpha \lambda^2, \quad \beta_1 \beta_2 \beta_3 = \beta \mu^2, \quad \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \gamma \nu^2.$$

Or les deux dernières conditions se réduisent, en vertu

des équations de Q, à la suivante

$$\nu\beta(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3) = \lambda^2.$$

On peut donc se donner à volonté α_1 , c'est-à-dire le point A_1 , et si l'on détermine α_2 et α_3 par l'équation précédente et $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \lambda^2$, le triangle $A_1B_1C_1$ sera circonscrit à Q_1 .

9. THÉORÈME. — *Si une droite $X_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ est tangente à la conique Q circonscrite à ABC selon la droite fixe $X(\lambda, \mu, \nu)$, le pôle $O_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ de X par rapport à ABC appartient à la conique Q_1 inscrite selon le pôle $O(\alpha, \beta, \gamma)$ de X_1 ; de plus, le point de contact ω de X_1 est le pôle de la tangente ρ en O_1 .*

En effet, comme X_1 est une tangente à Q, on a (4)

$$\pm\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \pm\sqrt{\frac{\mu}{\mu_1}} = 1,$$

et puisque

$$\lambda = -\alpha_1, \quad \mu = -\beta_1, \quad \lambda_1 = -\alpha, \quad \mu_1 = -\beta,$$

il vient, en remplaçant,

$$(14) \quad \pm\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1}} \pm\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta}} = 1,$$

ou (6) O_1 est sur Q_1 .

D'ailleurs, si $\rho(x, y, z)$ est la tangente à Q_1 en O_1 , on a (1)

$$\frac{-\lambda_1}{x} + \frac{y}{-\mu_1} = 1, \quad \frac{x}{-\lambda} + \frac{-\mu}{y} = 1,$$

d'où

$$\frac{\lambda_1}{-x} + \frac{-y}{\mu_1} = 1, \quad \frac{-x}{\lambda} + \frac{\mu}{-y} = 1.$$

Donc (1), le point $(-x, -y, -z)$, pôle de ρ , se trouve sur X_1 et sur Q ou se confond avec le point de contact ω .

Remarque I. — Comme O_1 est fixe, O décrit la quartique (14).

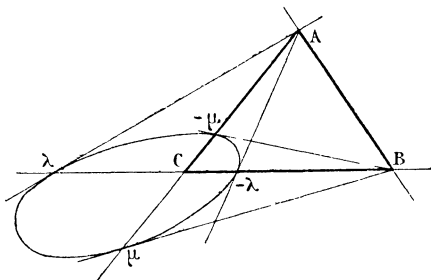
Remarque II. — On aura le théorème corrélatif en supposant le point O fixe ainsi que Q_1 , et le point O_1 mobile sur Q_1 .

10. Conique rapportée à l'un de ses triangles conjugués. — Son équation est

$$(15) \quad \frac{\lambda^2}{\alpha^2} + \frac{\beta^2}{\mu^2} = 1,$$

car cette conique (*fig. 3*) coupe BC et CA aux points conjugués harmoniques $\pm \lambda$, $\pm \mu$. De plus, les droites

Fig. 3.



qui joignent A et B à ces points sont des tangentes, puisque, pour $\alpha = \pm \lambda$, les deux valeurs de β sont nulles, et pour $\beta = \pm \mu$ les deux valeurs de α sont infinies.

Si, comme au n° 4, on écrit qu'une droite $X_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ est une tangente, on aura pour les coordonnées du point de contact

$$(16) \quad \alpha \lambda_1 = \lambda^2 \quad \beta \mu_1 = \mu^2, \quad \gamma \nu_1 = \nu^2,$$

et l'équation (15), qui devient

$$(17) \quad \frac{\lambda_1^2}{\lambda^2} + \frac{\mu_1^2}{\mu^2} = 1,$$

est alors celle de la conique en coordonnées tangentielles.

Si AB passe à l'infini, C devient le milieu de chacun des segments $(\lambda, -\lambda)$, $(\mu, -\mu)$, et les droites $A\lambda$, $B\mu$ restent tangentes. Le sommet de l'angle C est alors le centre et les côtés prennent les directions de deux diamètres conjugués.

Si l'on désigne par $2a$, $2b$ les longueurs de ces diamètres, par x et y les coordonnées cartésiennes d'un point de la courbe, on aura

$$\lambda = \frac{\infty}{a}, \quad \mu = \frac{b}{\infty}, \quad \alpha = \frac{\infty}{x}, \quad \beta = \frac{y}{\infty},$$

et l'équation (15) prendra la forme connue

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'équation (17) devient aussi

$$(18) \quad \frac{\alpha^2}{x_1^2} + \frac{b^2}{y_1^2} = 1,$$

x_1 et y_1 étant les longueurs $C\lambda_1$, $C\mu_1$, qui seraient les coordonnées cartésiennes de la tangente mobile X_1 .

De plus, $O(x, y)$ étant le point de contact, les relations (16) donnent

$$xx_1 = a^2, \quad yy_1 = b^2.$$

11. Polaire d'un point par rapport à Q.

THÉORÈME. — *Étant donnés la conique Q circonscrite à ABC selon la droite $X(\lambda, \mu, \nu)$ et le point $O(\alpha, \beta, \gamma)$, les droites qui joignent deux à deux les points $(\cdot, \mu\gamma)$ et $(\cdot, \beta\nu)$, (λ, γ) et (α, ν) , $(\lambda\beta, \cdot)$ et $(\alpha\mu, \cdot)$ forment un triangle $A_1B_1C_1$ homologique avec ABC, et l'axe ρ d'homologie est la polaire de O par rapport à Q.*

Les droites a_1, b_1, c_1 coupent, en effet, les côtés BC, CA, AB aux points

$$(19) \quad x = \frac{\mu - \beta}{\mu\beta(\gamma - \nu)}, \quad y = \frac{\nu - \gamma}{\nu\gamma(\alpha - \lambda)}, \quad z = \frac{\lambda - \alpha}{\lambda\alpha(\beta - \mu)},$$

et, comme $xyz = +1$, ces trois points sont situés sur une droite $\rho(x, y, z)$.

Or, si les droites $A\alpha, B\beta, C\gamma$ coupent Q en A_2, B_2, C_2 , on a (1), pour le point A_2 ,

$$\alpha, \quad \frac{1}{\nu(\lambda - \alpha)}, \quad \frac{\nu(\alpha - \lambda)}{\alpha},$$

et (4), pour la tangente en A_2 ,

$$\frac{\alpha^2}{\lambda}, \quad \frac{\lambda}{\nu(\lambda - \alpha)^2}, \quad \frac{\nu(\lambda - \alpha)^2}{\alpha^2}.$$

Cette tangente coupe $A\lambda$ au point

$$I \quad \lambda, \quad \frac{\mu(\lambda + \alpha)}{\lambda - \alpha}, \quad \frac{\nu(\alpha - \lambda)}{\lambda + \alpha}.$$

De même les tangentes en B_2 et C_2 coupent $B\mu$ et $C\nu$ aux points

$$\begin{aligned} II \quad & \frac{\lambda(\beta - \mu)}{\mu + \beta}, \quad \mu, \quad \frac{\nu(\mu + \beta)}{\mu - \beta}, \\ K \quad & \frac{\lambda(\nu + \gamma)}{\nu - \gamma}, \quad \frac{\mu(\gamma - \nu)}{\nu + \gamma}, \quad \nu. \end{aligned}$$

Il résulte de ces valeurs que les points I, H, K, qui fixent la polaire de O, appartiennent à la droite ρ .

Remarque I. — On peut donc (avec la règle) construire la polaire de O, sans qu'il soit nécessaire de tracer la conique Q.

Remarque II. — Si $x = y = z = 1$, O est le centre

de Q, et les formules (19) donnent, pour ce centre,

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\lambda(1 - \lambda + \lambda\mu)}{1 - \lambda - \lambda\mu}, \\ \beta = \frac{\mu(1 - \mu + \mu\nu)}{1 - \mu - \mu\nu}, \\ \gamma = \frac{\nu(1 - \nu + \lambda\nu)}{1 - \nu - \lambda\nu}. \end{array} \right.$$

12. THÉORÈME. — *Si les droites qui joignent un point $O(\alpha, \beta, \gamma)$ de la conique Q circonscrite à ABC selon la droite $X(\lambda, \mu, \nu)$, aux points λ, μ, ν , coupent la conique en A_1, B_1, C_1 , le triangle $A_1 B_1 C_1$ est homologique avec ABC; le centre ω d'homologie est le point où la tangente X touche la conique Q_1 inscrite selon le point O, et l'axe ρ , qui est la polaire de ω par rapport à Q, tourne autour du point O_1 , pôle de X par rapport à ABC.*

En effet, d'après (4), l'une des coordonnées de A_1 est $\lambda^2 : \alpha$, et on aura les autres par l'équation (2). De même, pour B_1 et C_1 . On trouve ainsi

$$\left\{ \begin{array}{lll} A_1 & \frac{\lambda^2}{\alpha}, & \frac{1}{\lambda\gamma}, \frac{1}{\lambda\beta}, \\ B_1 & \frac{1}{\mu\gamma}, & \frac{\mu^2}{\beta}, \frac{1}{\mu\alpha}, \\ C_1 & \frac{1}{\nu\beta}, & \frac{1}{\nu\alpha}, \frac{\nu^2}{\gamma}. \end{array} \right.$$

Les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont donc concourantes au point

$$\omega \left(\frac{\lambda^2}{\alpha}, \frac{\mu^2}{\beta}, \frac{\nu^2}{\gamma} \right),$$

et ce point, qui appartient à X pour vérifier son équation (1), est de plus (6) le point où X touche Q_1 .

Les côtés de $A_1 B_1 C_1$ coupent les côtés correspondants

de ABC aux points

$$x = -\alpha, \quad y = -\beta, \quad z = -\gamma,$$

et ces points sont situés sur la droite $\rho(-x, -y, -z)$, polaire de O par rapport à ABC.

Comme on a

$$\frac{-\alpha}{-\lambda} + \frac{-\mu}{-\beta} = 1,$$

cette droite ρ passe par le point O($-\lambda, -\mu, -\nu$), pôle de X (triangle ABC); elle est de plus polaire de ω (conique Q), car les relations (1), qui lient le point à sa polaire, se trouvent vérifiées.

13. THÉORÈME. — *Le lieu des centres $\omega(x, y, z)$ de la conique Q, inscrite à ABC selon le point O(α, β, γ), mobile sur la droite fixe X(λ, μ, ν), est une conique.*

Comme O appartient à X, on a (1)

$$\frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\beta}{\mu} = 1.$$

Or (formule 22),

$$\alpha = \frac{1+x-xy}{1+x+xy}, \quad \beta = \frac{1+x+xy}{-1+x+xy}.$$

En remplaçant, il vient

$$[(\lambda\mu + \mu - 1)y^2 + 2\lambda\mu y + (1 + \lambda\mu - \mu)]x^2 - 2(\mu y - 1)x + (1 + \mu - \lambda\mu) = 0.$$

Cette équation est celle d'une conique Q_2 qui coupe les côtés BC, CA, AB aux points qui sont les racines des équations

$$\begin{aligned} (1 + \lambda\mu - \mu)x^2 + 2x + (1 + \mu - \lambda\mu) &= 0, \\ (\lambda\mu + \mu - 1)y^2 + 2\lambda\mu y + (1 + \lambda\mu - \mu) &= 0, \\ (1 + \mu - \lambda\mu)z^2 + 2\mu z + (\lambda\mu + \mu - 1) &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire en leurs milieux et aux points

$$x_1 = \frac{\lambda\mu - \mu - 1}{\lambda\mu - \mu + 1}, \quad y_1 = \frac{\mu - 1 - \lambda\mu}{\lambda\mu + \mu - 1}, \quad z_1 = \frac{1 - \mu - \lambda\mu}{1 + \mu - \lambda\mu}.$$

Or, si Q_3 est la conique inscrite ayant pour centre $\omega_1 (-\lambda^{-1}, -\mu^{-1}, -\nu^{-1})$, cette conique est inscrite à ABC selon le point $O_1(x_1, y_1, z_1)$.

Remarque I. — Si X passe à l'infini, on a

$$x_1 = y_1 = z_1 = -1,$$

et Q_2 devient l'ellipse inscrite selon le centre de gravité.

Remarque II. — Si $\lambda = \frac{b^2}{c^2}$, $\mu = \frac{c^2}{a^2}$, $\nu = \frac{a^2}{b^2}$, ou si X est la droite isotomique de celle suivant laquelle le cercle est circonscrit à ABC, ω_1 devient le point de Lemoine, O_1 est l'orthocentre et Q_2 est le cercle des neuf points.

14. Pôle d'une droite par rapport à la conique Q_1 .

THÉORÈME. — *Étant données la conique Q_1 inscrite à ABC selon le point $O(x, \beta, \gamma)$ et la droite $\varrho(\lambda, \mu, \nu)$, si l'on appelle A_1, B_1, C_1 les points $(\mu\gamma, \nu\beta)$, $(\lambda\gamma, \nu\alpha)$, $(\lambda\beta, \mu\alpha)$, les droites AA_1, BB_1, CC_1 seront concourantes en un point ω , pôle de ϱ par rapport à Q_1 .*

En effet, les coordonnées des droites AA_1, BB_1, CC_1 sont

$$(21) \quad x = \frac{\nu - \gamma}{\nu\gamma(\mu - \beta)}, \quad y = \frac{\lambda - \alpha}{\lambda\alpha(\nu - \gamma)}, \quad z = \frac{\mu - \beta}{\mu\beta(\lambda - \alpha)},$$

et comme $xyz = -1$, ces droites sont concourantes en un point $\omega(x, y, z)$.

Or, si l'on mène à Q_1 les tangentes $\lambda I, \mu H, \nu K$, on

aura, pour λ_1 ,

$$\lambda, \quad \frac{\beta(\lambda - \alpha)}{\lambda}, \quad \frac{1}{\beta(\lambda - \alpha)},$$

et (6), pour le point de contact I,

$$\frac{\lambda^2}{\alpha}, \quad \frac{\beta(\lambda - \alpha)^2}{\lambda^2}, \quad \frac{-\alpha}{\beta(\lambda - \alpha)^2}.$$

On en déduit, pour αI ,

$$\alpha, \quad \frac{\beta(\lambda - \alpha)}{\lambda + \alpha}, \quad \frac{\gamma(\lambda + \alpha)}{\alpha - \lambda}.$$

On aurait de même pour βH et γK ,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(\mu + \beta)}{\beta - \mu}, \quad \beta, \quad \frac{\gamma(\mu - \beta)}{\mu + \beta}, \\ \frac{\alpha(\nu - \gamma)}{\nu + \gamma}, \quad \frac{\beta(\nu + \gamma)}{\nu - \gamma}, \quad \gamma. \end{aligned}$$

Il résulte de ces valeurs que les droites αI , βH , γK , qui fixent le pôle de ρ , passent par ω .

Remarque I. — On pourra donc (avec la règle) trouver le pôle d'une droite X, et, si cette droite est à l'infini, on aura le centre de Q_1 en joignant A, B, C aux milieux des segments $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$.

Remarque II. — Si O est le centre de Q_1 , on a

$$(22) \quad x = \frac{1 - \gamma}{\gamma(1 - \beta)}, \quad y = \frac{1 - \alpha}{\alpha(1 - \gamma)}, \quad z = \frac{1 - \beta}{\beta(1 - \alpha)}.$$

15. THÉORÈME. — Si par le point où une tangente $X(\lambda, \mu, \nu)$ à une conique Q_1 inscrite à ABC selon le point $O(\alpha, \beta, \gamma)$, coupe les rayons Ax , $B\beta$, $C\gamma$, on mène les secondes tangentes a_1 , b_1 , c_1 , le trilatère $a_1b_1c_1$ est homologique avec abc ; l'axe ρ d'homologie, qui tourne autour de O, est tangent à la conique Q circonscrite à ABC selon la droite X, et le centre ω

d'homologie, qui est le pôle de ρ par rapport à Q_1 , décrit la droite X_1 , polaire de O par rapport à ABC .

D'après (4), $\alpha^2 : \lambda$ est l'une des coordonnées de A_1 , et l'on aura (1) les deux autres en écrivant que a_1 enveloppe Q_1 . En procédant de même pour b_1 et c_1 , on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 : \frac{\alpha^2}{\lambda}, \quad \frac{-1}{\nu\alpha}, \quad \frac{-1}{\mu\alpha}, \\ b_1 : \frac{-1}{\nu\beta}, \quad \frac{\beta^2}{\mu}, \quad \frac{-1}{\lambda\beta}, \\ c_1 : \frac{-1}{\mu\gamma}, \quad \frac{-1}{\lambda\gamma}, \quad \frac{\gamma^2}{\nu}. \end{array} \right.$$

On voit par là que les points (aa_1) , (bb_1) , (cc_1) sont situés sur la droite $\rho \left(\frac{\alpha^2}{\lambda}, \frac{\beta^2}{\mu}, \frac{\gamma^2}{\nu} \right)$.

Cette droite, qui passe par O pour vérifier son équation (1), est de plus (4) tangente à Q .

Les droites AA_1 , BB_1 , CC_1 , qui ont pour coordonnées $x = -\lambda$, $y = -\mu$, $z = -\nu$, sont concourantes au point $\omega(-\lambda, -\mu, -\nu)$, pôle de X (tri. ABC).

Ce point appartient d'ailleurs à la droite

$$X_1(-\alpha, -\beta, -\gamma),$$

car

$$\frac{-\alpha}{-\lambda} + \frac{-\mu}{-\beta} = 1.$$

et il est le pôle de ρ (conique Q) parce qu'il vérifie les relations (21) qui lient le pôle à sa polaire.

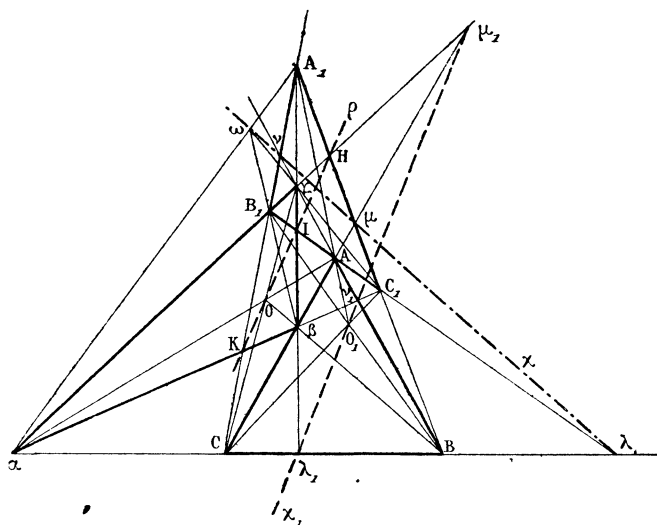
16. *Génération de la conique.* — Coupons le triangle ABC par la droite $X(\lambda, \mu, \nu)$ (fig. 4), et tirons les droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ formant le triangle $A_1B_1C_1$ homologique de ABC selon l'axe X , et son pôle

$$O_1(-\lambda, -\mu, -\nu)$$

par rapport à ces triangles.

Proposons-nous de décrire la conique Q circonscrite à ABC selon la droite X et inscrite à $A_1 B_1 C_1$ selon le

Fig. 4.



point O_1 qui est aussi le pôle de X par rapport à cette conique.

Si $\omega(x, y, z)$ est un point de X, on aura (1)

$$(23) \quad \frac{\lambda}{x} + \frac{y}{\mu} = 1, \quad \frac{\mu}{y} + \frac{z}{\nu} = 1, \quad \frac{\nu}{z} + \frac{x}{\lambda} = 1.$$

Les droites ωA_1 , ωB_1 , ωC_1 coupent BC, CA, AB en α , β , γ , et comme

$$A_1(-\lambda, \mu, \nu), \quad B_1(\lambda, -\mu, \nu), \quad C_1((\lambda, \mu, -\nu),$$

on aura, en utilisant les équations (23),

$$(24) \quad \alpha x = \lambda^2, \quad \beta y = \mu^2, \quad \gamma z = \nu^2.$$

Il en résulte que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont concourantes au point $O(\alpha, \beta, \gamma)$.

Or, d'après (24), les équations (23) deviennent

$$(25) \quad \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\mu}{\beta} = 1, \quad \frac{\beta}{\mu} + \frac{\nu}{\gamma} = 1, \quad \frac{\gamma}{\nu} + \frac{\lambda}{\alpha} = 1.$$

Donc (1) le point O appartient à Q. Les triangles $A_1 B_1 C_1$ et $\alpha\beta\gamma$ sont homologues (centre ω), et l'axe $X_1(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ a pour coordonnées

$$\lambda_1 = -\alpha, \quad \mu_1 = -\beta, \quad \nu_1 = -\gamma.$$

D'ailleurs, les équations (23) expriment que X_1 passe par O_1 , et les équations (25) que le triangle $\alpha\beta\gamma$ est circonscrit à $A_1 B_1 C_1$.

On a ainsi le système homologique

$$\begin{array}{c|ccc|c} \omega & A & B & C & \rho \\ O & A_1 & B_1 & C_1 & X_1 \\ O_1 & \alpha & \beta & \gamma & X \end{array}$$

dans lequel chacun des centres ou des axes est celui des deux triangles non écrits sur la ligne où il se trouve.

Si I, H, K sont les points qui fixent l'axe ρ , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} I : \quad \lambda, \quad \frac{\beta(\lambda + \alpha)}{\lambda}, \quad \frac{1}{\beta(\lambda + \alpha)}, \\ H : \frac{1}{\gamma(\mu + \beta)}, \quad \mu, \quad \frac{\gamma(\mu + \beta)}{\mu}, \\ K : \frac{\alpha(\nu + \gamma)}{\nu}, \quad \frac{1}{\alpha(\nu + \gamma)}, \quad \nu, \end{array} \right.$$

d'où, d'après (24) et (25),

$$(26) \quad \rho : \frac{\lambda^3}{x^2}, \quad \frac{\mu^3}{y^2}, \quad \frac{\nu^3}{z^2}.$$

Ces valeurs montrent que la droite ρ passe par O. De plus, elle est tangente en ce point à Q, car (4) les coordonnées de cette tangente sont

$$\frac{\alpha^2}{\lambda}, \quad \frac{\beta^2}{\mu}, \quad \frac{\gamma^2}{\nu},$$

c'est-à-dire, d'après (24), celles (26) de ρ .

Il est facile de voir que le triangle $\alpha\beta\gamma$ est autopolaire par rapport à Q , car la polaire de α est A_1I ou $\beta\gamma$. Il en résulte que λ_1 est le pôle de $A_1\alpha$, et comme O_1 est le pôle de X , la droite $O_1\lambda_1$ ou X_1 est la polaire de ω .

En résumé, pour toute position de ω sur X , on pourra (avec la règle) obtenir un point O de Q , la tangente ρ en ce point, et la polaire X_1 de ω .

17. THÉORÈME. — *Deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$, conjugués par rapport à une conique, sont homologiques, et réciproquement.*

Soit Q une conique coupant les côtés BC , CA , AB du triangle de référence aux points λ et λ_1 , μ et μ_1 , ν et ν_1 . On a

$$r = \lambda\lambda_1\mu\mu_1\nu\nu_1 = +1.$$

Appelons I et I_1 , H et H_1 , K et K_1 les points

$$\begin{aligned} &(\mu\nu, \mu_1\nu_1) \quad \text{et} \quad (\mu\nu_1, \mu_1\nu), \\ &(\lambda\nu, \lambda_1\nu_1) \quad \text{et} \quad (\lambda\nu_1, \lambda_1\nu), \\ &(\lambda\mu, \lambda_1\mu_1) \quad \text{et} \quad (\lambda\mu_1, \lambda_1\mu), \end{aligned}$$

et $A_1B_1C_1$ le triangle des droites Π_1 , HH_1 , KK_1 , lequel est conjugué de ABC par rapport à Q .

On a

$$I : \frac{\nu_1 - \nu}{\nu\nu_1(\mu - \mu_1)}, \quad \frac{\mu\nu - \mu_1\nu_1}{\nu - \nu_1}, \quad \frac{\nu\nu_1(\mu - \mu_1)}{\mu\nu - \mu_1\nu_1},$$

et, en permutant ν et ν_1 ,

$$I_1 : \frac{\nu - \nu_1}{\nu\nu_1(\mu - \mu_1)}, \quad \frac{\mu\nu_1 - \mu_1\nu}{\nu_1 - \nu}, \quad \frac{\nu\nu_1(\mu - \mu_1)}{\mu\nu_1 - \mu_1\nu}.$$

D'où, pour le côté a_1 ,

$$\frac{\nu + \nu_1}{\nu\nu_1(\mu + \mu_1)}, \quad \frac{\mu + \mu_1}{2}, \quad \frac{2\nu\nu_1}{\nu + \nu_1}.$$

On trouverait de même, pour b_1 et c_1 ,

$$\frac{2\lambda\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}, \quad \frac{\lambda + \lambda_1}{\lambda\lambda_1(\nu + \nu_1)}, \quad \frac{\nu + \nu_1}{2},$$

$$\frac{\lambda + \lambda_1}{2}, \quad \frac{2\mu_1\mu_1}{\mu + \mu_1}, \quad \frac{\mu + \mu_1}{\mu_1\mu_1(\lambda + \lambda_1)}.$$

Les points aa_1 , bb_1 , cc_1 ont donc pour coordonnées

$$x = \frac{\nu + \nu_1}{\nu\nu_1(\mu + \mu_1)}, \quad y = \frac{\lambda + \lambda_1}{\lambda\lambda_1(\nu + \nu_1)}, \quad z = \frac{\mu + \mu_1}{\mu_1\mu_1(\lambda + \lambda_1)}.$$

D'où

$$xyz = \frac{1}{r} = +1,$$

ou les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont homologues selon l'axe $\rho(x, y, z)$.

Réciproquement, si $xyz = 1$, on aura $r = 1$ et les deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ homologues seront conjugués par rapport à la conique Q circonscrite à l'hexagone $\lambda\lambda_1\mu\mu_1\nu\nu_1$.

D'ailleurs, si l'on connaît les coordonnées des côtés a_1 , b_1 , c_1 , on pourra, en s'aidant des relations obtenues, trouver les points où cette conique Q coupe les côtés de ABC .

18. THÉORÈME. — *Si deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont homologues, le triangle $A'B'C'$ des points (BC_1, B_1C) , (AC_1, A_1C) , (AB_1, A_1B) et le trilatère $a'_1b'_1c'_1$ des droites (bc_1, b_1c) , (ac_1, a_1c) , (ab_1, a_1b) sont aussi homologues.*

En effet, les triangles homologues ABC et $A_1B_1C_1$ sont conjugués par rapport à une certaine conique Q (17). Or, comme les points B et C_1 ont b_1 et c pour polaires, BC_1 est la polaire du point b_1c ; de même B_1C est la polaire du point bc_1 . Donc le point (BC_1, B_1C)

ou A' est le pôle de la droite (b_1c, bc_1) ou a'_1 . De même, B' et C' sont les pôles de b'_1, c'_1 . Les triangles $A' B' C'$ et $A'_1 B'_1 C'_1$ sont ainsi conjugués par rapport à Q , et, par suite (17), homologiques.