

VLADIMIR VARICAK

Remarque sur la valeur de i^i

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 14
(1895), p. 258-262

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__258_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REMARQUE SUR LA VALEUR DE i^i ;

PAR M. VLADIMIR VARICAK,
Professeur à Osijek (Esseg), en Slavonic.

La vraie valeur de cette expression a été déterminée
déjà par Euler. Prenant pour point de départ

$$\cos x + i \sin x = e^{ix},$$

équation fondamentale dans la théorie des imaginaires, on trouve

$$i = e^{\frac{\pi}{2} i}.$$

Élevant de côté et d'autre à la puissance i , on obtient

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Jusqu'à ce moment j'estimai ce résultat incontestable; maintenant je trouve dans la *Géométrie de position* de Mouchot (¹), à la page 146, le raisonnement que voici :

Comme il est certain que

$$i = e^{\frac{\pi}{2} i},$$

Euler ne fait pas difficulté d'en conclure

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}},$$

et, par suite,

$$-i^i = e^{\frac{\pi}{2}}, \dots$$

Vallès conteste, non sans raison, l'exactitude des deux dernières formules, puisqu'il en résulterait

$$e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}} = 0;$$

d'où

$$e^{\pi} = -1,$$

conséquence absurde, et qui ne saurait provenir que d'une fausse hypothèse.

(¹) A. MOUCHOT, *Les nouvelles bases de la Géométrie supérieure*. Paris, 1892.

Afin de donner les valeurs exactes, M. Mouchot évalue par son procédé purement géométrique les logarithmes de i^i et de $-i^i$. A la page 141 de l'Ouvrage cité, il donne les égalités

$$i^i = \pm i \quad \text{et} \quad -i^i = \mp i;$$

d'où il suit que i^i et $-i^i$ ont pour logarithmes, l'un $\pm \frac{\pi}{2} i$, l'autre $\mp \frac{\pi}{2} i$. Il en résulte

$$i^i = e^{\pm \frac{\pi}{2} i}, \quad -i^i = e^{\mp \frac{\pi}{2} i},$$

et, si l'on applique à ces nouvelles formules le raisonnement de Vallès, on trouve

$$e^{\pm \frac{\pi}{2} i} + e^{\mp \frac{\pi}{2} i} = 0;$$

d'où

$$e^{\pm \pi i} = -1,$$

résultat exact ⁽¹⁾.

Tout cela m'étonnait bien. Je lus plusieurs fois ce passage; cela m'eût coûté beaucoup d'admettre que la déduction d'Euler soit erronée. Celle de Mouchot-Vallès me semblait l'être du moment où j'ai lu à la page 139 de l'Ouvrage cité « qu'élever une vectrice à la puissance i , c'est la convertir en une autre vectrice ayant pour logarithme le sien *changé de mode* », et pourtant quand l'auteur opère avec les angles, dont la tangente excède l'unité, il ne suit pas cette règle ⁽²⁾. Sur cette déduction douteuse s'appuie la détermination des logarithmes de i^i et de $-i^i$.

Je regrette que M. Mouchot n'ait pas dit où se trouve

(1) Ouvrage cité, p. 147.

(2) Voir les quatre dernières lignes de la page 139.

la remarque de Vallès sur l'inexactitude de la formule d'Euler, car je voudrais bien connaître son analyse et savoir d'où il a tiré l'égalité

$$-i^i = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Elle est évidemment fausse, et c'est bien difficile de croire qu'elle se trouve dans Euler. Après tout, il me semble qu'elle dérive d'un *lapsus calami*.

En faisant

$$\cos x - i \sin x = e^{-ix}$$

et, pour $x = \frac{\pi}{2}$,

$$-i = e^{-i \frac{\pi}{2}},$$

on a, élevant à la puissance i ,

$$(-i)^i = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Si l'on oublie de mettre la base $-i$ entre parenthèses, on a la seconde équation en question. Au moins j'ai en vain tenté de la déduire d'une autre manière. Mais il n'est pas permis d'omettre les parenthèses; $(-i)^i$ n'est pas égal à $-i^i$.

D'ailleurs on a

$$(-i)^i = \left(\frac{1}{i}\right)^i = \frac{1}{i^i} = i^{-i},$$

et enfin

$$i^{-i} = e^{\frac{\pi}{2}},$$

comme la seconde équation. Avec elle on ne peut tirer aucune conséquence absurde, mais avec celles de M. Mouchot on le peut de la manière suivante : nous

(262)

avons vu qu'il est arrivé à l'égalité

$$i^i = e^{\pm \frac{\pi}{2} i};$$

prenons les logarithmes népériens, nous aurons

$$i \log i = \pm \frac{\pi}{2} i$$

et, quand l'on supprime le facteur i , il vient

$$\log i = \pm \frac{\pi}{2},$$

conséquence absurde et qui est en contradiction avec l'expression donnée à la page 146,

$$\log i = \left(2k + \frac{1}{2} \right) \pi i,$$

k désignant un nombre quelconque ou zéro.