NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. BARRIEU

Théorie générale du plus grand commun diviseur et du plus petit multiple commun des nombres commensurables

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 14 (1895), p. 165-173

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__165_0>

THÉORIE GÉNÉRALE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ET DU PLUS PETIT MULTIPLE COMMUN DES NOMBRES COMMENSURABLES (1);

PAR M. P. BARRIEU,
Professeur au lycée de Périgueux.

CAS PARTICULIER. — *Formules de corrélation.* — Appliquons le théorème II aux deux séries (2) :

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad l,$$
$$\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{c}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{l}.$$

Nous aurons

$$\left\{ \mathrm{D}(a, b, c, \ldots, l).m\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{l}\right) = 1, \right. \qquad \text{(III)}$$

$$\left\{ m(a, b, c, \ldots, l).\mathrm{D}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{l}\right) = 1, \right. \qquad \text{(IV)}$$

ce qui donne le théorème suivant :

Le produit du plus grand commun diviseur de n nombres par le plus petit multiple commun de leurs inverses est égal à l'unité.

Nous donnons aux formules (III) et (IV) le nom de *formules de corrélation* parce qu'elles permettent de passer d'une propriété du plus grand commun diviseur à une propriété correspondante du plus petit multiple commun, et réciproquement.

(1) *Voir* même Tome, p. 95.

(2) Il demeure entendu, une fois pour toutes, que les lettres $a, b, c, \ldots, l$ désignent des nombres quelconques entiers ou fractionnaires.

Ces deux formules peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{l}\right) = \frac{1}{\mathrm{D}(a, b, c, \ldots, l)}, & \text{(III)'} \\ \mathrm{D}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{l}\right) = \frac{1}{m(a, b, c, \ldots, l)}, & \text{(IV)'} \end{cases}$$

d'où il résulte que :

Le plus petit multiple commun des inverses de n nombres est égal à l'inverse du plus grand commun diviseur de ces nombres, et réciproquement.

Ces formules sont d'un usage fréquent dans les transformations.

Nous allons maintenant tirer du théorème II, par voie de corollaires, toutes les propriétés essentielles du plus grand commun diviseur et du plus petit multiple commun.

Corollaire I. — Si l'on multiplie, ou si l'on divise n nombres entiers ou fractionnaires par un même nombre entier ou fractionnaire k, le plus grand commun diviseur et le plus petit multiple commun de ces nombres sont multipliés ou divisés par k.

En effet, d'après le théorème II, les deux séries

$$\begin{matrix} ak, & bk, & ck, & \ldots, & lk, \\ \frac{1}{a}, & \frac{1}{b}, & \frac{1}{c}, & \ldots, & \frac{1}{l} \end{matrix}$$

donnent

$$\begin{cases} \mathrm{D}(ak, bk, \ldots, lk).m\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{l}\right) = k, \\ m(ak, bk, \ldots, lk).\mathrm{D}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{l}\right) = k, \end{cases}$$

d'où, en appliquant les formules de corrélation,

$$\begin{cases} \mathrm{D}(ak, bk, \ldots, lk).\dfrac{1}{\mathrm{D}(a, b, c, \ldots, l)} = k, \\ m(ak, bk, \ldots, lk).\dfrac{1}{m(a, b, c, \ldots, l)} = k, \end{cases}$$

d'où enfin

$$\begin{cases} \mathrm{D}(ak, bk, ck, \ldots, lk) = k.\mathrm{D}(a, b, c, \ldots, l) & \text{(V} \\ m(ak, bk, ck, \ldots, lk) = k.m(a, b, c, \ldots, l) & \text{(VI)} \end{cases}$$

C. Q. F. D.

Corollaire II. — 1° Pour qu'un codiviseur de n nombres soit leur plus grand commun diviseur, il faut et il suffit qu'en divisant chacun de ces nombres par ce codiviseur les quotients obtenus soient premiers entre eux.

2° Pour qu'un comultiple de n nombres soit leur plus petit multiple commun, il faut et il suffit qu'en divisant ce comultiple par chacun de ces nombres, les quotients obtenus soient premiers entre eux.

Soient n nombres entiers ou fractionnaires

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad l,$$

et soient δ et μ un codiviseur et un comultiple de ces nombres.

1° On a identiquement, d'après le corollaire I,

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{D}(a, b, c, \ldots, l) = \delta.\mathrm{D}\left(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}, \frac{c}{\delta}, \cdots, \frac{l}{\delta}\right).$$

Donc pour que δ soit égal à $\mathrm{D}(a, b, c, \ldots, l)$, il faut et il suffit que les nombres *entiers* $\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}, \frac{c}{\delta}, \cdots$ soient premiers entre eux. C. Q. F. D.

2° Appliquons le théorème II aux deux séries

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots. \quad l,$$

$$\frac{\mu}{a}, \quad \frac{\mu}{b}, \quad \frac{\mu}{c}, \quad \ldots, \quad \frac{\mu}{l}.$$

Nous aurons

$$(2) \qquad m(a, b, c, \ldots, l).\mathrm{D}\left(\frac{\mu}{a}, \frac{\mu}{b}, \frac{\mu}{c}, \cdots, \frac{\mu}{l}\right) = \mu.$$

Donc, pour que μ soit égal à $m(a, b, c, \ldots, l)$, il faut et il suffit que les nombres *entiers* $\frac{\mu}{a}, \frac{\mu}{b}, \frac{\mu}{c}, \cdots, \frac{\mu}{l}$ soient premiers entre eux. C. Q. F. D.

Remarque. — Les formules (1) et (2) montrent que δ est un diviseur de $\mathrm{D}(a, b, c, \ldots, l)$ et que μ est un multiple de $m(a, b, c, \ldots, l)$. Donc :

Tout codiviseur de plusieurs nombres divise leur plus grand commun diviseur ;

Tout comultiple de plusieurs nombres est un multiple de leur plus petit multiple commun.

Corollaire III. — 1° Le produit de n nombres entiers ou fractionnaires est égal au produit du plus grand commun diviseur de ces nombres par le plus petit multiple commun des produits obtenus en combinant ces nombres $n-1$ à $n-1$.

2° Le produit de n nombres entiers ou fractionnaires est égal au produit du plus petit multiple commun de ces nombres par le plus grand commun diviseur des produits obtenus en combinant ces nombres $n-1$ à $n-1$.

Soient $a, b, c, \ldots, l$ les nombres donnés, et P leur produit.

Le théorème II, appliqué aux deux séries

$$\begin{array}{llllll} a, & b, & c, & \ldots, & l, \\ \frac{\mathrm{P}}{a}, & \frac{\mathrm{P}}{b}, & \frac{\mathrm{P}}{c}, & \ldots, & \frac{\mathrm{P}}{l}, \end{array}$$

donne

$$m(a, b, c, \ldots, l).\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{P}}{a}, \frac{\mathrm{P}}{b}, \frac{\mathrm{P}}{c}, \ldots, \frac{\mathrm{P}}{l}\right) = \mathrm{P},$$

$$\mathrm{D}(a, b, c, \ldots, l).m\left(\frac{\mathrm{P}}{a}, \frac{\mathrm{P}}{b}, \frac{\mathrm{P}}{c}, \ldots, \frac{\mathrm{P}}{l}\right) = \mathrm{P},$$

d'où les formules connues

$$(\text{VII}) \qquad m(a, b, c, \ldots, l) = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{P}}{a}, \frac{\mathrm{P}}{b}, \frac{\mathrm{P}}{c}, \ldots, \frac{\mathrm{P}}{l}\right)}.$$

$$(\text{VIII}) \qquad \mathrm{D}(a, b, c, \ldots, s) = \frac{\mathrm{P}}{m\left(\frac{\mathrm{P}}{a}, \frac{\mathrm{P}}{b}, \frac{\mathrm{P}}{c}, \ldots, \frac{\mathrm{P}}{l}\right)}.$$

Corollaire IV. — Le produit de n nombres, entiers ou fractionnaires, est égal au plus grand commun diviseur des produits obtenus en combinant ces nombres r à r, multiplié par le plus petit commun multiple des produits obtenus en les combinant $n - r$ à $n - r$.

Soient $a, b, c, \ldots, l$ les n nombres donnés, et P leur produit.

Désignons par

$$(1) \qquad \pi, \quad \pi', \quad \pi'', \quad \ldots$$

les divers produits obtenus en combinant r à r les nombres donnés.

Les produits obtenus, en les combinant $n - r$ à $n - r$, seront

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{P}}{\pi}, \quad \frac{\mathrm{P}}{\pi'}, \quad \frac{\mathrm{P}}{\pi''}, \quad \ldots.$$

Si maintenant nous appliquons le théorème II aux séries (1) et (2), nous aurons

$$(\text{IX}) \qquad \mathrm{D}(\pi, \pi', \pi'', \ldots).m\left(\frac{\mathrm{P}}{\pi}, \frac{\mathrm{P}}{\pi'}, \frac{\mathrm{P}}{\pi''}, \cdots\right) = \mathrm{P}.$$

$$(\text{X}) \qquad m(\pi, \pi', \pi'', \ldots).\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{P}}{\pi}, \frac{\mathrm{P}}{\pi'}, \frac{\mathrm{P}}{\pi''}, \cdots\right) = \mathrm{P}.$$

C. Q. F. D.

Remarque sur les corollaires. — Dans la démonstra-

tion des corollaires, nous avons établi directement les propriétés du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple. Nous aurions pu, pour les corollaires (I), (III) et (IV), nous contenter de faire la démonstration pour le plus grand commun diviseur et en déduire la propriété correspondante du plus petit commun multiple, au moyen des formules de corrélation.

Reprenons, par exemple, le corollaire I, et supposons démontré directement que *si l'on multiplie, ou si l'on divise, plusieurs nombres par un même facteur, leur plus grand commun diviseur est multiplié, ou divisé, par ce facteur.*

Appliquons ce théorème aux nombres $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \cdots$ et au facteur $\frac{1}{k}$. Nous aurons

$$\frac{1}{k}\,\mathrm{D}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \cdots\right) = \mathrm{D}\left(\frac{1}{ak}, \frac{1}{bk}, \frac{1}{ck}, \cdots\right),$$

d'où, en appliquant les formules de corrélation,

$$\frac{1}{k}\,\frac{1}{m(a, b, c, \ldots)} = \frac{1}{m(ak, bk, ck, \ldots)},$$

d'où

$$k\,m(a, b, c, \ldots) = m(ak, bk, ck, \ldots).$$

formule qui donne la propriété corrélative du plus petit commun multiple.

On suivrait la même marche pour les corollaires (III) et (IV).

Cet emploi des formules de corrélation met bien en évidence les liens qui unissent le plus grand commun diviseur au plus petit commun multiple, et explique le parallélisme complet qui existe entre les propriétés de ces deux fonctions.

Nous rencontrerons plus loin un emploi analogue des mêmes formules.

THÉORÈME III. — LOI DE TRANSFORMATION. — *On peut, sans changer le plus grand commun diviseur (ou le plus petit commun multiple) de n nombres, grouper arbitrairement ces nombres, et remplacer ensuite chacun des groupes par le plus grand commun diviseur (ou le plus petit commun multiple) des nombres qui le composent, et réciproquement.*

Un même nombre peut entrer dans plusieurs groupes, et un ou plusieurs nombres peuvent être laissés en dehors des groupes.

Soient n nombres donnés, entiers ou fractionnaires : $a, b, c, \ldots, l$.

Groupons arbitrairement ces nombres et formons le plus grand commun diviseur des nombres de chaque groupe. Ainsi, par exemple, soient :

d_1 le plus grand commun diviseur des nombres a, d, g, i,
d_2 le plus grand commun diviseur des nombres a, b, d, e;
d_3 le plus grand commun diviseur des nombres f, j, k;
et soient c, h, l, les nombres laissés en dehors des groupes : on aura

$$\mathrm{D}(a, b, c, \ldots, l) = \mathrm{D}(d_1, d_2, d_3, c, h, l).$$

En effet, soit p un facteur premier quelconque, et soit α l'exposant *minimum* de p dans les nombres donnés. Il résulte de la loi de formation que le facteur p se retrouvera avec son exposant *minimum* α dans l'un des plus grands communs diviseurs d_1, d_2, d_3, ou dans l'un des nombres restants c, h, l.

L'exposant *minimum* de p sera donc le même dans

$(a, b, c, \ldots, l)$ et dans (d_1, d_2, d_3, c, h, l). Par conséquent, le facteur p entrera avec le même exposant dans

$$\mathrm{D}(a, b, c, \ldots, l)$$

et dans

$$\mathrm{D}(d_1, d_2, d_3, c, h, l),$$

et l'on aura

$$\text{(XI)} \qquad \mathrm{D}(a, b, c, \ldots, l) = \mathrm{D}(d_1, d_2, d_3, c, h, l).$$

C. Q. F. D.

On démontrerait de même que

$$\text{(XII)} \qquad m(a, b, c, \ldots, l) = m(m_1, m_2, m_3, c, h, l).$$

Exemples :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(a, b, c, d, e) &= \mathrm{D}[\mathrm{D}(a, b), c, d, e] \\ &= \mathrm{D}[\mathrm{D}(a, b), \mathrm{D}(a, c), d, e] \\ &= \mathrm{D}[\mathrm{D}(a, b, c), \mathrm{D}(d, e)], \\ m(a, b, c, d) &= m[m(a, b, c), d] \\ &= m\{m[m(a, b), c], d\}. \end{aligned}$$

Corollaire. — Si, dans une série de nombres donnés, il entre en même temps un nombre et des multiples ou des diviseurs de ce nombre, on peut, dans la formation du plus grand commun diviseur, supprimer tous les multiples, et, dans la formation du plus petit commun multiple, supprimer tous les diviseurs.

En effet, soient a, b, c, $\ldots$, l des nombres donnés entiers ou fractionnaires, et k un nombre *entier;* on a

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(a, ak, b, c, \ldots) &= \mathrm{D}[\mathrm{D}(a, ak), b, c, \ldots] \\ &= \mathrm{D}[a.\mathrm{D}(1, k), b, c, \ldots] \\ &= \mathrm{D}(a, b, c, \ldots), \end{aligned}$$

puisque, k étant entier, on a

$$\mathrm{D}(1, k) = 1.$$

De même,

$$\begin{aligned} m(a, ak, b, e, \ldots) &= m[m(a, ak), b, c, \ldots] \\ &= m[a.m(1, k), b, c, \ldots] \\ &= m(ak, b, c, \ldots), \end{aligned}$$

puisque, k étant entier, on a

$$m(1, k) = k. \qquad (A \textit{ suivre}).$$