NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Concours général de 1894

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 14 (1895), p. 123-131

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__123_1>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1894.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Mathématiques.

On donne un triangle ABC dont les côtés ont respectivement pour équations

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0;$$

une conique S touchant en A et B les côtés CA, CB, de l'angle ACB, et dont l'équation est

$$XY = Z^2.$$

Sur cette conique S on prend le point μ, défini par les équations

$$X = Y = Z,$$

et un point variable M; enfin on désigne par ν le point où la droite $C\mu$ rencontre la corde de contact AB.

Cela posé, on joint le point M à l'un des deux points m de la droite AB, qui ont même polaire par rapport aux deux angles AMB, $\mu M \nu$.

1° Démontrer que, le point M décrivant la conique S, la droite Mm enveloppe une courbe Σ du quatrième ordre et de la troisième classe, dont l'équation en coordonnées tangentielles est

$$u^3 + v^3 = uvw.$$

2° Aux points où une droite D rencontre la courbe Σ, on mène à cette courbe les tangentes T_1, T_2, T_3, T_4, et l'on considère la conique C_1 inscrite dans le pentagone formé par ces quatre tangentes et la droite AB; démontrer que, si l'on assujettit la conique C_1 à passer par un point donné P, la droite D enveloppe une conique C_2.

3° Montrer que la conique C_2 se réduit à deux points f, f' quand le point P est sur une certaine conique C_3; trouver dans ces conditions l'enveloppe Σ' de la droite ff' et le lieu des points f, f'.

Physique.

I. Mesure des températures.

II. En admettant comme démontré : 1° que le coefficient de dilatation cubique est le triple du coefficient de dilatation linéaire; 2° que la dilatation d'une enveloppe est exactement celle qu'elle subirait si elle faisait partie d'une masse solide et continue de la même substance, on pourrait obtenir le coefficient de dilatation absolue du mercure par l'expérience suivante :

Deux tubes de même verre, de 1^{m} de longueur et de 20^{mm} de diamètre environ, sont placés côte à côte dans une même étuve, qu'on peut porter à diverses températures. L'un est en communication avec un manomètre et constitue une espèce de thermomètre à air. On connaît le volume V du réservoir à 0° et le volume très petit v du tube de jonction jusqu'au repère α de la petite branche du tube manométrique. Ce tube porte vers ses extrémités deux traits, dont on a mesuré la distance l_0 à zéro. Un appareil micrométrique extérieur permet de relever la variation de distance de ces deux traits aux diverses températures; l'autre tube, dont le volume à 0° est V′, est rempli de mercure et constitue un thermomètre à poids.

Une expérience consiste, l'étuve étant à une température T : 1° à relever la variation de distance des deux traits; 2° à mesurer la pression H′ indiquée par le manomètre; 3° à peser le mercure sorti de l'appareil.

Application numérique.

$V = V' = 300^{cc}$.	$p = 91^{gr},936$.
$v = 1^{cc}$.	$\dfrac{H'}{H} = 1,5407$.
t température extérieure $= 0°$.	On prendra $D_0 = 13,596$.
$\dfrac{l - l_0}{l_0} = \dfrac{1}{774}$.	— $\alpha = \dfrac{1}{273}$.

Chimie.

I. Cyanogène. — Acide cyanhydrique.

II. Deux gaz différents, occupant le même volume dans les mêmes conditions de température et de pression, sont mélangés dans un vase A; la densité du mélange par rapport à l'hydrogène est 7,5. Le vase A est séparé d'un vase B, primitivement vide, par une cloison mince percée d'un très petit trou. Celui-ci ayant été débouché pendant un temps très court, une certaine quantité des deux gaz s'est répandue dans le vase B et y forme un mélange ayant une densité par rapport à l'hydrogène égale à $\sqrt{14}$.

On demande :

1° Quel est le poids de chacun des gaz occupant le même volume qu'un poids d'hydrogène égal à 2?

2° Quels peuvent être ces deux gaz?

3° D'indiquer une expérience permettant de lever toute ambiguïté sur la nature des deux gaz qui forment le mélange primitif.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Mathématiques.

On donne une ellipse E, et, dans le plan de cette ellipse, on prend une droite H perpendiculaire à l'un des axes de l'ellipse. On se propose de faire correspondre à la droite H un cercle que nous désignerons par la notation (H), situé dans le plan de l'ellipse et assujetti aux conditions suivantes : son centre est sur celui des axes de l'ellipse, qui est perpendiculaire à la droite H, et le rapport entre la puissance d'un point M de l'ellipse par rapport au cercle (H) et le carré de la distance du même point M à la droite H est indépendant de la position du point M sur l'ellipse.

1° Déterminer la position du centre du cercle (H) ainsi défini, la grandeur de son rayon, et la valeur du rapport qui est indépendant de la position du point M sur l'ellipse. Donner les conditions de possibilité du problème et, quand ces conditions sont remplies, reconnaître, d'après la position de la droite H, comment le cercle (H) qui lui correspond est situé par rapport à l'ellipse E et par rapport à la droite H. En particulier, indiquer dans quels cas le cercle (H) ou n'a aucun point en dehors de l'ellipse, ou n'a aucun point à l'intérieur de l'ellipse.

2° Soient H et K deux droites perpendiculaires, l'une à l'un des axes de l'ellipse, l'autre à l'autre; soit P le point de concours de ces deux droites, et soient (H) et (K) les cercles qui correspondent à ces deux droites.

Démontrer que la ligne des centres des cercles (H) et (K) passe par le point P.

Trouver le lieu des positions que doit occuper le point P pour que les cercles (H) et (K) soient tangents.

Trouver le lieu des positions que doit occuper le point P pour que l'axe radical des cercles (H) et (K) passe par le point P.

3° Soient H, H' deux droites perpendiculaires *au grand* *axe* de l'ellipse; et soient (H), (H') les deux cercles que l'on fait correspondre à ces droites.

Démontrer que, si un point M se déplace sur l'ellipse E, la somme ou la différence des longueurs des tangentes menées du point M aux deux cercles est constante, selon que l'arc d'ellipse parcouru par ce point M est ou n'est pas compris entre les droites H et H'.

Modifier comme il convient l'énoncé de cette propriété, pour le cas où les droites H et H' seraient perpendiculaires *au petit axe* de l'ellipse, au lieu d'être perpendiculaires au grand axe.

PREMIÈRE-SCIENCES (ENSEIGNEMENT MODERNE).

Mathématiques.

Étant données deux droites X, Y, qui se coupent en O, un point A sur X et un point B sur Y,

1° Construire l'arc de parabole tangent à ces droites aux points A, B, et compris entre ces points.

2° Donner la condition géométrique pour que le sommet de la courbe soit sur l'arc AB.

3° Le point C étant le milieu de la corde AB, on représente par c la longueur OC et par u, v les angles AOC, COB; calculer en fonction de ces données le paramètre de la parabole et étudier la variation de cette quantité quand, le point A restant fixe, le point B parcourt la droite illimitée Y; examiner les cas limites.

4° Construire *a priori* (sans faire usage des éléments de la courbe) une tangente à l'arc considéré parallèle à une direction donnée; conditions de possibilité.

RHÉTORIQUE.

Géométrie et Cosmographie.

On donne deux cônes de révolution égaux SAB, S'A'B', placés de façon que les plans des cercles de base AB, A'B', sont parallèles, et que le sommet de chacun des cônes est dans le plan du cercle de base de l'autre. On coupe ces deux cônes par un plan P parallèle aux plans des deux bases, et situé entre ces plans; ce plan P coupe le premier cône suivant un cercle CD, et le second cône suivant un cercle C'D'.

On désigne par r, l, h le rayon de base, l'arête, la hauteur de chacun des cônes, par x la distance du sommet S au point de rencontre du plan P et de l'arête SA, et par y la distance du sommet S au plan P.

1° Déterminer x de façon que le rapport de la somme des surfaces latérales des deux troncs de cône ABCD, A'B'C'D' à la surface latérale du cône SAB soit égal à un nombre donné λ. — Discuter.

2° Déterminer y de façon que le rapport de la somme des volumes des troncs de cône ABCD, A'B'C'D' au volume du cône SAB soit égal à un nombre donné μ. — Discuter.

3° Au lieu de supposer les surfaces latérales des deux cônes limitées au sommet et au cercle de base de chaque cône, on suppose ces surfaces latérales prolongées indéfiniment dans les deux sens, et on suppose que le plan P, parallèle aux plans des deux bases, au lieu d'être nécessairement compris entre ces deux plans, peut se déplacer dans tout l'espace.

Dans ces conditions nouvelles, indiquer pour chacun des deux problèmes quelles conventions il faut faire sur la valeur de l'inconnue et sur la façon d'entendre l'énoncé, pour que l'équation obtenue, quand on suppose le plan P compris entre les plans des bases des deux cônes, convienne encore quand cette condition n'est pas remplie.

Compléter la discussion de chacun des deux problèmes ainsi généralisés.

SECONDE CLASSIQUE.

Algèbre et Géométrie.

I. On considère le système d'équations simultanées

$$\begin{aligned} 52x - 34y - z + 9a &= 0, \\ 49x - 31y - 3z - b &= 0, \\ 36x - 24y + z + 3a + 2b &= 0, \end{aligned}$$

dans lesquelles a et b désignent des entiers positifs donnés, et x, y, z des inconnues.

Résoudre ces équations, et chercher quelles doivent être les valeurs des entiers positifs a et b, pour que les valeurs des inconnues soient positives, et que, en outre, la valeur de l'inconnue x soit la plus petite possible.

II. On considère un tétraèdre OABC, dont on suppose les arêtes prolongées indéfiniment dans les deux sens, et un plan P parallèle au plan de la face ABC; le plan P coupe les arêtes OA, OB, OC, ou leurs prolongements, respectivement aux points A', B', C'. On désigne par α le milieu du côté BC, par β le milieu du côté AC, et par γ le milieu du côté AB.

1° Trouver pour quelle position P_1 du plan P les droites $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ sont parallèles.

2° Démontrer que, pour toute position du plan P, différente de la position P_1, les droites $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ se coupent en un même point M.

3° Trouver le lieu géométrique du point M, lorsque le plan P se déplace, en restant toujours parallèle au plan de la face ABC.

SECONDE MODERNE.

Mathématiques.

I. On considère une pyramide régulière à base carrée dans laquelle le rapport de la surface totale à l'aire de la base est 2,56. Calculer l'angle d'une face latérale avec le plan de base, l'angle de deux faces latérales et l'angle de deux arêtes latérales.

Calculer la plus courte distance d'une arête latérale et d'une arête de la base dans le cas particulier où le volume de la pyramide est 543 décalitres.

(On fera usage des tables à cinq décimales.)

II. On donne la projection horizontale $abcde$, $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ d'un prisme pentagonal dont les bases sont ABCDE et $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$; on donne de plus les projections verticales des sommets $A_1 B_1 C_1$.

1° Construire les projections verticales des sommets D, E.

2° Construire le pentagone ABCDE au moyen d'un rabattement sur le plan de front du point A.

3° Construire la projection verticale du prisme en supposant sa hauteur donnée.

4° Donner la ponctuation des deux projections.

TROISIÈME CLASSIQUE.

Arithmétique, Algèbre et Géométrie.

I. Démontrer que si l'on divise par 111 les nombres entiers a et $1000a$, on trouve le même reste.

Déduire de là que les nombres

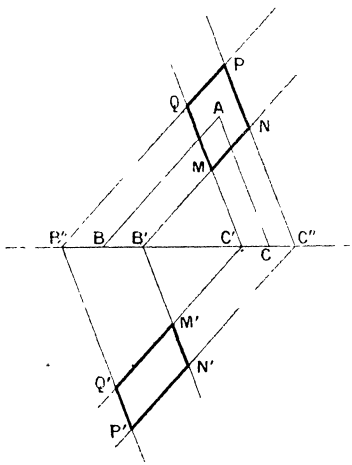
$$A = 10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1, \qquad B = 10^{6n+4} + 10^{3n+2} + 1$$

sont divisibles par 111, et que le nombre

$$C = 10^{6n} + 10^{3n} + 1$$

est égal à un multiple de 111 plus 3. La lettre n désigne un nombre entier quelconque.

II. On donne un triangle ABC, et, sur le côté BC prolongé, on porte de part et d'autre du point B des longueurs



BB′ et BB″ égales à une longueur donnée β, et, de part et d'autre du point C, des longueurs CC′ et CC″ égales à une longueur donnée γ.

En menant par B' et B'' des parallèles au côté AB, et par C' et C'' des parallèles au côté AC, on forme un parallélogramme MNPQ; de même, en menant par B' et B'' des parallèles au côté AC, et, par C' et C'' des parallèles au côté AB, on forme un deuxième parallélogramme $M'N'P'Q'$.

1° Trouver les lieux géométriques des sommets du parallélogramme MNPQ, lorsque β et γ varient de manière que le rapport $\frac{\beta}{\gamma}$ reste égal à un nombre donné m.

2° Trouver, dans la même hypothèse, les lieux géométriques des sommets du parallélogramme $M'N'P'Q'$.

3° Pour quelle valeur de m le parallélogramme MNPQ est-il un losange? Résoudre la même question pour le parallélogramme $M'N'P'Q'$.

TROISIÈME MODERNE.

Mathématiques.

On donne deux circonférences qui se coupent aux points A et B; par le point B on mène une sécante quelconque, qui rencontre l'une des circonférences en C et l'autre en D; on joint ces points au point A et l'on détermine : 1° le centre M du cercle inscrit; 2° les centres M_1, M_2, M_3 des cercles ex-inscrits au triangle CAD.

Cela posé, on demande :

1° Quel est le lieu géométrique que décrit le centre M, quand la sécante CBD tourne autour du point B?

2° Quels sont les lieux géométriques que décrivent les centres M_1, M_2, M_3?

3° Quel est le lieu géométrique que décrit le point G, point de rencontre des médianes du triangle mobile CAD?

4° On suppose que l'on place la sécante mobile dans la position KBH, pour laquelle l'aire du triangle est maximum. — Dire quelle est cette position, et, en supposant que l'on joigne les points fixes K et H, respectivement aux points mobiles C et D, trouver le lieu géométrique du point où se rencontrent les droites CK et DH.