

ANDOYER

Sur la dynamique du point

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 52-65

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__52_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA DYNAMIQUE DU POINT;

PAR M. ANDOYER.

1. Soit un point matériel M , de masse m , soumis à une force dérivant d'un potentiel U , tel que, v désignant sa vitesse, on ait

$$mv^2 = 2U.$$

Si F_n et F_b sont les projections de la force sur la normale principale et sur la binormale à la trajectoire,

on a

$$F_b = 0, \quad \frac{2U}{\rho} = F_n,$$

ρ désignant le rayon de courbure.

Imaginons maintenant que l'on oblige le même point à suivre la même courbe sous l'action d'une force dérivée d'un potentiel U' fonction de U , tel que, v' désignant la vitesse dans ce nouveau mouvement, on ait

$$mv'^2 = 2U'.$$

On aura aussi, en appelant F'_b et F'_n les quantités analogues à F_b et à F_n , et N la réaction de la courbe, dirigée nécessairement suivant la normale principale,

$$F'_b = F_b \frac{dU'}{dU} = 0, \quad F'_n = F_n \frac{dU'}{dU} = \frac{2U'}{\rho} - N.$$

La force est dans le plan osculateur, de même que la réaction de la courbe.

Ces équations peuvent servir dans presque tous les cas à ramener la question de l'étude du mouvement d'un point sur une courbe fixe (la force étant assujettie à rester dans le plan osculateur) à l'étude du mouvement d'un point libre admettant cette courbe comme trajectoire. Cette question n'est pas sans intérêt : nous allons en donner plusieurs exemples.

1° Soient donnés

$$U' \text{ et } N = \frac{f(v')}{\rho} = \frac{f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)}{\rho}.$$

On a alors la relation

$$2U \frac{dU'}{dU} = 2U' - f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right),$$

$$U = e^{\int \frac{dU'}{U' - \frac{1}{2}f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)}}.$$

Si en particulier $f(v')$ est une constante $2a$,

$$U = C(U' - a),$$

C étant une constante arbitraire.

Ce résultat est d'ailleurs très connu.

2° On donne

$$U' \text{ et } N = F'_n f(v') = F'_n f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right).$$

On a donc

$$F'_n \left[1 + f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right) \right] = \frac{2U'}{\rho} = \frac{2U}{\rho} \frac{dU'}{dU} \left[1 + f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right) \right],$$

d'où

$$\frac{dU}{U} = \frac{dU'}{U'} \left[1 + f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right) \right],$$

$$U = U' e^{\int \frac{dU'}{U'} f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)}.$$

Si en particulier $f(v')$ est une constante a , on a

$$U = C U'^{a+1},$$

C étant une constante arbitraire.

C'est encore un résultat connu; pour $a = -1$, il correspond à la théorie des brachistochrones.

3° On donne

$$U' \text{ et } F'_n = \frac{f(v')}{\rho} = \frac{f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)}{\rho};$$

alors

$$f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right) = 2U \frac{dU'}{dU},$$

$$U = e^{\int \frac{2 dU'}{f\left(\sqrt{\frac{2U'}{m}}\right)}}.$$

Si $f(v') = mv'^2$, on trouve, naturellement, $U = CU'$.

Ce cas rentre d'ailleurs dans le premier, puisque

$$N = \frac{2U' - f(v')}{\rho}.$$

2. Le plus généralement U et U' seront fonctions de la distance à un plan, à un point ou à une droite, et s'il en est de même des diverses quantités qu'on peut se donner pour déterminer le mouvement, le problème sera susceptible de quelque extension.

Supposons d'abord U et U' fonctions de la distance à un plan, celui des xy . Le mouvement a lieu dans un plan parallèle à l'axe des z , que nous pouvons choisir pour le plan des xz .

En faisant $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{mA}}$, A étant une constante arbitraire, la trajectoire est déterminée par

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{UA - 1}};$$

le rayon de courbure est donné par

$$\rho = \frac{2(UA)^{\frac{3}{2}} dz}{d(UA)}.$$

On a aussi

$$F_n = \frac{dU}{dz \sqrt{UA}},$$

et, en appelant F_t la force tangentielle,

$$F_t = \frac{dU}{dz} \sqrt{1 - \frac{1}{UA}}.$$

Cela étant, supposons qu'on veuille déterminer la courbe dans le plan de zx , en se donnant en fonction de z :

1° U' et N . On aura

$$\frac{2U}{\rho} \frac{dU'}{dU} = \frac{2U'}{\rho} - N,$$

(56)

$$(U\Lambda) dU' - U' d(U\Lambda) + (U\Lambda)^{\frac{3}{2}} N dz = 0,$$

$$U\Lambda = \frac{U'}{\left(\int \frac{N dz}{2\sqrt{U'}}\right)^2}$$

et

$$dx = \frac{dz \int \frac{N dz}{2\sqrt{U'}}}{\sqrt{U' - \left(\int \frac{N dz}{2\sqrt{U'}}\right)^2}}.$$

Exemple (a) :

$$U' = mg(z+h), \quad N = \lambda mg,$$

$$dx = \frac{dz(k + \lambda \sqrt{z+h})}{\sqrt{(z+h) - (k + \lambda \sqrt{z+h})^2}}.$$

Exemple (b) :

$$U' = mgz, \quad N = \lambda mgz^n,$$

$$dx = \frac{dz(k + z^{n+\frac{1}{2}})}{\sqrt{\frac{(n+1)^2}{\lambda^2} z - (k + z^{n+\frac{1}{2}})^2}}.$$

2° U' et F'_n.

$$F'_n = \frac{2U}{\rho} \frac{dU'}{dU} = \frac{dU'}{dz \sqrt{U\Lambda}},$$

$$U\Lambda = \left(\frac{dU'}{dz}\right)^2 \frac{1}{F_n'^2},$$

$$dx = \frac{F'_n dz}{\sqrt{\left(\frac{dU'}{dz}\right)^2 - F_n'^2}}.$$

Exemple :

$$U' = mgz, \quad F'_n = mg\lambda z^n,$$

$$dx = \frac{z^n dz}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - z^{2n}}}.$$

3° U' et F'_c . On en tire

$$F'_n = \sqrt{\left(\frac{dU'}{dz}\right)^2 - F'^2_c},$$

et l'on est ramené au cas précédent.

4° U' et la force centripète $F'_c = \frac{mv'^2}{\rho}$.

On a

$$F'_c = \frac{2U'}{\rho} = \frac{U' d(UA)}{(UA)^{\frac{3}{2}} dz},$$

$$UA = \frac{1}{\left(\int \frac{F'_c dz}{2U'}\right)^2},$$

$$dx = \frac{dz \int \frac{F'_c dz}{2U'}}{\sqrt{1 - \left(\int \frac{F'_c dz}{2U'}\right)^2}}.$$

Exemple :

$$U' = mgz, \quad F'_c = mg\lambda z^n,$$

$$dx = \frac{dz(z^n + k)}{\sqrt{\frac{4n^2}{\lambda^2} - (z^n + k)^2}}.$$

5° Connaissant U ou l'une quelconque des quantités qui peuvent déterminer U et U' , calculer N .

$$N = \frac{2\left(U' - U \frac{dU'}{dU}\right)}{\rho} = \frac{U' d(UA) - (UA) dU'}{(UA)^{\frac{3}{2}} dz}.$$

Exemple. — La courbe est

$$x^2 = 2pz \quad \text{et} \quad U' = mpc^2 \left(z + \frac{p}{2}\right).$$

On a d'abord

$$UA = \frac{2z}{p} + 1,$$

et, par suite,

$$N = 0.$$

6^o Connaissant U et N, calculer U'.

$$\begin{aligned}\frac{\rho U}{\rho} \frac{dU'}{dU} &= \frac{\rho U'}{\rho} - N, \\ (UA) dU' - U' d(UA) + N(UA)^{\frac{3}{2}} dz &= 0, \\ U' &= kUA - UA \int \frac{N dz}{\sqrt{UA}}.\end{aligned}$$

Exemple. — La courbe est

$$z^2 = 2px \quad \text{et} \quad N = \lambda.$$

On a d'abord

$$\begin{aligned}UA &= \frac{p^2}{z^2} + 1, \\ U' &= k \left(\frac{p^2}{z^2} + 1 \right) - \lambda z \left(\frac{p^2}{z^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

3. Supposons maintenant U et U' fonctions de la distance à un point. Soit l'origine ce point; la courbe est dans un plan que nous prendrons pour celui des xy , et, en coordonnées polaires, on aura

$$\begin{aligned}r^2 \frac{d\theta}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m A}}, & d\theta &= \frac{dr}{r \sqrt{r^2 UA - 1}}, \\ \rho &= \frac{2(UA)^{\frac{3}{2}} r dr}{d(UA)}, \\ F_n &= -\frac{dU}{r dr \sqrt{UA}}, & F_t &= \frac{dU}{dr} \sqrt{1 - \frac{1}{r^2 UA}}, \\ \dots\dots\dots, & & \dots\dots\dots\end{aligned}$$

Avec ces formules, on pourra traiter les mêmes problèmes que précédemment.

Il en sera de même si l'on suppose U et U' fonctions de la distance à une droite, l'axe des z , par exemple; faisant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, on aura comme formules prin-

cipales,

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{2A'}{m}}, \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2}{mA}}, \quad d\theta = \frac{dr}{r \sqrt{r^2(U - A')A - 1}},$$

$$\rho = \frac{2(UA)^{\frac{3}{2}} r dr}{d(UA) \sqrt{1 + AA' r^2}}.$$

4. Imaginons maintenant que le point M se meuve sur une surface donnée sous l'action du potentiel U; soient F_n et F_g les projections de la force sur la normale à la surface et la normale à la courbe située dans le plan tangent; soient enfin ρ_g et R le rayon de courbure géodésique de la courbe et le rayon de courbure de la section normale correspondante, N la réaction; on a

$$mv^2 = 2U, \quad \frac{2U}{\rho_g} = F_g, \quad \frac{2U}{R} = F_n + N.$$

Si l'on oblige le même point à suivre la même courbe sous l'action d'une force dérivée du potentiel U', fonction de U, on aura, en appelant ν' , F'_g et F'_n les quantités analogues à ν , F_g et F_n , et désignant par N'_g et N'_n les projections correspondantes de la réaction N',

$$mv'^2 = 2U',$$

$$\frac{2U'}{\rho_g} - N'_g = F'_g = F_g \frac{dU'}{dU},$$

$$\frac{2U'}{R} - N'_n = F'_n = F_n \frac{dU'}{dU},$$

et ces équations permettront de résoudre des questions tout à fait semblables à celles qui ont été résolues plus haut. Les deux premières applications subsistent pour ainsi dire sans modifications. Pour aller plus loin, nous donnerons les formules principales qu'il y aura lieu d'employer dans les cas les plus fréquents.

1° U et U' sont fonctions de z. La surface est de ré-

volution et a pour équation $z = f(r)$.

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d\theta}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m A}}, & d\theta &= \frac{dr \sqrt{1+f'^2}}{r \sqrt{r^2 U A - 1}}, \\ N &= \frac{dU}{dz} \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} - \frac{2U f'}{r \sqrt{1+f'^2}} - \frac{2}{A r} (r^2 U A - 1) \frac{d}{dr} \left(\frac{f'}{r \sqrt{1+f'^2}} \right), \\ F_n &= - \frac{dU}{dz} \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}, & F_g &= \frac{dU}{dz} \frac{f'}{\sqrt{U A} r \sqrt{1+f'^2}}, \\ F_t &= \frac{dU}{dz} \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} \sqrt{1 - \frac{1}{r^2 U A}}, \\ \rho_g &= \frac{2 (U A)^{\frac{3}{2}} r dz \sqrt{1+f'^2}}{f' d(U A)}, \\ R &= \frac{U A}{- \frac{1}{r} (r^2 U A - 1) \frac{d}{dr} \left(\frac{f'}{r \sqrt{1+f'^2}} \right) - U A \frac{f'}{r \sqrt{1+f'^2}}}. \end{aligned}$$

Exemple. — Sur le parabolöide $z = \frac{r^2}{2p}$, on suppose $U = mg(z + h)$; en outre, la projection de N' sur Oz est $-mg$, de sorte que le point est animé dans le sens de Oz d'un mouvement uniforme. On trouve

$$\frac{1}{U A} = 2p z - k p \frac{2z + p}{z + h}$$

et, par suite,

$$d\theta = \frac{dr}{p r \sqrt{2kp}} \sqrt{r^2 (r^2 + 2ph) - 2kp (r^2 + p^2)}.$$

Il est clair, d'ailleurs, que le problème est plus facile à traiter directement que de cette façon.

2° U et U' sont fonctions de la distance à un point $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; la surface est de révolution et a pour équation $z = f(r)$.

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d\theta}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m A}}, & d\theta &= \frac{dr \sqrt{1+f'^2}}{r \sqrt{r^2 U A - 1}}, \\ N &= \frac{dU}{dR} \frac{z - r f'}{R \sqrt{1+f'^2}} - \frac{2U f'}{r \sqrt{1+f'^2}} - \frac{2(r^2 U A - 1)}{A r} \frac{d}{dr} \left(\frac{f'}{r \sqrt{1+f'^2}} \right), \end{aligned}$$

(61)

$$F_n = \frac{dU}{dR} \frac{rf' - z}{R \sqrt{1+f'^2}}, \quad F_g = \frac{dU}{dR} \frac{r + zf'}{\sqrt{UA} R r \sqrt{1+f'^2}},$$

$$F_t = \frac{dU}{dR} \frac{(r + zf') \sqrt{1 - \frac{1}{r^2 UA}}}{R \sqrt{1+f'^2}},$$

$$\rho_g = \frac{2(UA)^{\frac{3}{2}} R r dR \sqrt{1+f'^2}}{(r + zf') d(UA)},$$

$$R = - \frac{UA}{\frac{1}{r}(r^2 UA - 1) \frac{d}{dr} \left(\frac{f'}{r \sqrt{1+f'^2}} \right) - UA \frac{f'}{r \sqrt{1+f'^2}}}.$$

3° U et U' sont fonctions de la distance à une droite r ;
la surface est un hélicoïde.

$z = f(r) + h\theta$ (pour $h = 0$, la surface est de révolution).

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} + h \frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m A}},$$

$$\frac{d\theta}{dr} = - \frac{hf'}{r^2 + h^2} + \frac{1}{r^2 + h^2} \sqrt{\frac{(1+f'^2)r^2 + h^2}{UA(r^2 + h^2) - 1}},$$

$$N = \frac{dU}{dr} \frac{rf'}{\sqrt{h^2 + (1+f'^2)r^2}} - \frac{4h \sqrt{UA(r^2 + h^2) - 1}}{A(r^2 + h^2)^2} + \frac{2U r^2 f'}{(r^2 + h^2) \sqrt{(1+f'^2)r^2 + h^2}} + \frac{2[UA(r^2 + h^2) - 1]}{A r} \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2 f'}{(r^2 + h^2) \sqrt{(1+f'^2)r^2 + h^2}} \right],$$

$$F_n = - \frac{dU}{dr} \frac{rf'}{\sqrt{h^2 + (1+f'^2)r^2}},$$

$$F_g = \frac{dU}{dr} \frac{1}{\sqrt{UA} \sqrt{h^2 + (1+f'^2)r^2}},$$

$$F_t = \frac{dU}{dr} \sqrt{h^2 + r^2 - \frac{1}{UA}},$$

$$\rho_g = \frac{2(UA)^{\frac{3}{2}} dr \sqrt{h^2 + (1+f'^2)r^2}}{d(UA)},$$

$$R = \frac{UA}{\left\{ \begin{array}{l} \frac{-2h\sqrt{UA(r^2+h^2)-1}}{(r^2+h^2)^2} + UA \frac{r^2 f'}{(r^2+h^2)\sqrt{(1+f'^2)r^2+h^2}} \\ + \frac{[UA(r^2+h^2)-1]}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2 f'}{(r^2-h^2)\sqrt{(1+f'^2)r^2+h^2}} \right] \end{array} \right\}}.$$

Il est clair que les formules qui précèdent peuvent encore servir à résoudre quantité de problèmes sur le mouvement d'un point matériel assujéti ou non à rester sur une surface donnée.

5. Il est de même intéressant de ramener les courbes tautochrones à des trajectoires libres d'un point matériel.

Si U' est le potentiel s'annulant au point de tautochronisme, et si T est le temps constant pour arriver à ce point, on a, en appelant s l'arc de la courbe compté à partir du point de tautochronisme,

$$\frac{dU'}{ds} + \frac{\pi^2 m}{4T^2} s = 0,$$

d'où

$$U' = \frac{\pi^2 m}{8T^2} s^2 = 0$$

et

$$dU'^2 + \frac{\pi^2 m}{2T^2} U' ds^2 = 0.$$

Supposons d'abord le point libre et la force assujéti à rester dans le plan osculateur; si d'abord U' est fonction de z , la courbe est dans le plan des xz par exemple, et l'on a

$$dx = dz \sqrt{-1 - \frac{2T^2}{\pi^2 m U'} \frac{dU'^2}{dz^2}}.$$

Le potentiel U sous l'action duquel le même point décrirait librement la même courbe est déterminé par

$$UA = \frac{\frac{2T^2}{\pi^2 m U'} \left(\frac{dU'}{dz} \right)^2}{1 + \frac{2T^2}{\pi^2 m U'} \left(\frac{dU'}{dz} \right)^2}.$$

Inversement, on peut en déduire U' en fonction de UA .

Exemple :

$$U' = mgz,$$

$$UA = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 z}{2 T^2 g}},$$

$$dx = dz \sqrt{\frac{-z}{\frac{2 T^2 g}{\pi^2} + z}}.$$

Soit maintenant U' fonction de la distance à un point; la courbe est dans le plan des xy par exemple, et l'on a

$$d\theta = \frac{dr \sqrt{-1 - \frac{2 T^2}{\pi^2 m U'} \frac{dU'^2}{dr^2}}}{r}.$$

On en déduit

$$UA = \frac{\frac{1}{r^2} - \frac{2 T^2}{\pi^2 m U'} \frac{dU'^2}{dr^2}}{1 + \frac{2 T^2}{\pi^2 m U'} \frac{dU'^2}{dr^2}}.$$

Exemple :

$$U' = \frac{m\lambda}{r} (a^2 - r^2),$$

$$UA = \frac{1}{r^2 + \frac{\pi^2}{4\lambda T^2} (a^2 - r^2)},$$

$$d\theta = \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{\frac{4\lambda T^2}{\pi^2} r^2 - r^2 + a^2}{r^2 - a^2}}.$$

Enfin imaginons que U' est fonction de r ; on aura d'abord, d'après la condition que la force est dans le plan osculateur,

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{dz}{C} \quad \text{puis} \quad d\theta = \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{-1 - \frac{2 T^2}{\pi^2 m U'} \frac{dU'^2}{dr^2}}{1 + C^2 r^2}},$$

d'où

$$(U - A')A = \frac{-C^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2 T^2}{\pi^2 m U'} \frac{dU'^2}{dr^2}}{1 + \frac{2 T^2}{\pi^2 m U'} \frac{dU'^2}{dr^2}}.$$

De même, sur l'hélicoïde $z = f(r) + h\theta$, avec U' fonction de r , on aura

$$\frac{d\theta}{dr} = - \frac{hf'}{r^2 + h^2} + \frac{1}{r^2 + h^2} \sqrt{ - [(1 + f'^2)r^2 + h^2] - (r^2 + h^2) \frac{2T^2}{\pi^2 m U'} \frac{dU'^2}{dr^2} }.$$

Sur une surface de révolution $z = f(r)$, on aura

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{r} \sqrt{ -(1 + f'^2) - \frac{2T^2}{\pi^2 m U'} \frac{dU'^2}{dr^2} },$$

et l'on pourra aussi bien supposer U' fonction de z et R , à cause de l'équation de la surface qui permet toujours d'exprimer $\frac{dU'}{dr}$ en fonction de r .

De ces formules, on tirerait facilement les valeurs correspondantes de UA . Si, par exemple, la surface est de révolution et U' fonction de r , on a

$$UA = \frac{\frac{1}{r^2} \frac{2T^2}{\pi^2 m U'} \frac{dU'^2}{dr^2}}{1 + f'^2 + \frac{2T^2}{\pi^2 m U'} \frac{dU'^2}{dr^2}}.$$

Exemple. — Déterminer une surface de révolution telle que la ligne géodésique tangente en A au parallèle du rayon p soit tautochrone en A pour la force

$$- m(ar + b)$$

(Agrégation, 1885).

Ici

$$UA = \frac{1}{p^2}, \quad U' = m \left[\frac{a}{r}(p^2 - r^2) + b(p - r) \right],$$

et, en faisant

$$\alpha = \frac{\pi^2}{4T^2} a, \quad b = \frac{\pi^2}{4T^2} \beta,$$

on a

$$f'^2 = \frac{\alpha(\alpha - 1)r^3 + (\alpha - 1)(p\alpha + 2\beta)r^2 + (2p\alpha + \beta)\beta r + p\beta^2}{r^2(\alpha r + \alpha p + 2\beta)}.$$

Remarque. — Il y a une différence essentielle entre les problèmes traités dans le premier paragraphe et ceux qui suivent : pour ceux-ci, en effet, c'est la quantité UA et non U qui joue le rôle prépondérant. Il est inutile d'insister sur les conséquences immédiates qui résultent de ce fait.