

AUDIBERT

**Solution de la question proposée pour
l'admission à l'École polytechnique en 1894**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 491-493

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__491_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1894 (1);**

PAR M. AUDIBERT.

La droite Δ rencontre, en un point P, le plan mobile $y = mx$. Ce plan coupe la sphère S suivant un méridien et la polaire de P, relative à ce méridien, rapportée à l'axe OZ et à la trace de son plan sur XOY, comme axe des abscisses ξ , a pour équation dans ce plan

$$\xi(bp - aq)\sqrt{1 + m^2} - z(q - pm) - r^2(b - am) = 0,$$

et dans l'espace

$$y = mx,$$

$$x(bp - aq)(1 + m^2) - z(q - pm) - r^2(b - am) = 0,$$

L'équation de Σ est la résultante de l'élimination de m ,

$$(1) \quad (aq - bp)(x^2 + y^2) + z(qx - py) - r^2(ay - bx) = 0;$$

elle représente une surface du second degré, réglée et à centre, soit un hyperboloïde à une nappe.

2° On voit d'abord que tout plan parallèle à XOY coupera Σ suivant un cercle. Transportons l'origine à son centre en faisant en même temps pivoter, autour de OX, les axes OY et OZ d'un angle dont la tangente soit $-\frac{q}{p}$, l'équation (1) devient

$$(aq - bp)(x^2 + y^2) + \sqrt{p^2 + q^2}xz - \frac{r^4}{4(p^2 + q^2)}(aq - bq) = 0.$$

(1) Voir même Tome, p. 296.

Laissant OY fixe et faisant tourner ZOX d'un angle α , l'équation transformée, pour $z = 0$, donne

$$(aq - bp)(y^2 + x^2 \cos^2 \alpha) + \sqrt{p^2 + q^2} \sin \alpha \cos \alpha x^2 - \frac{r^4}{4(p^2 + q^2)}(aq - bp) = 0,$$

relation qui devient, pour $\tan \alpha = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{aq - bp}$,

$$y^2 + x^2 = \frac{r^4}{4(p^2 + q^2)}.$$

Tous les plans parallèles à ce cercle donneront une nouvelle série de sections circulaires, faisant avec les premières un angle α .

Revenons au système primitif de coordonnées.

L'origine O centre de S et la droite Δ déterminent le plan

$$qx - py - (aq - bp)z = 0,$$

perpendiculaire en son milieu à la corde de contact des deux plans tangents menés par la droite Δ à la sphère; il est incliné sur XOY de l'angle α et sa trace sur ce plan fait avec OX un angle, dont la tangente est $-\frac{p}{q}$. Toute section qui lui sera parallèle donnera donc un cercle de la seconde série.

3° Concevons un système de coordonnées, parallèle à l'ancien, dont l'origine O_1 est sur l'axe OZ, commun aux deux systèmes ($OO_1 = h$).

On donne, comme précédemment, une droite Δ_1 ,

$$x = a_1 z + p, \quad y = b_1 z + q$$

et la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

L'équation de la surface Σ_1 engendrée ne différera de celle de $\Sigma(1)$ que par le changement de a en a_1 et de b en b_1 ; mais, rapportée au système primitif, distant de h ,

elle deviendra

$$(a_1q - b_1p)(x^2 + y^2) + z(qx - py) \\ + x(r^2b_1 + qh) - y(r^2a_1 + ph) = 0,$$

et on l'identifiera avec (1) en posant

$$b_1 = \frac{r^2b - qh}{r^2}, \quad a_1 = \frac{r^2a - ph}{r^2}.$$

4° Les équations de Δ_1 , rapportées au même système dont on aurait transporté l'origine dans le plan XOY au point $x = p, y = q$, seront

$$r^2x = (r^2a - ph)(z + h), \quad r^2y = (r^2b - qh)(z + h).$$

Éliminant h , on a l'équation du lieu des positions de Δ_1 quand le point O_1 se déplace sur OZ :

$$(qx - py)^2 = (aq - bp)[z(qx - py) + r^2(bx - ay)];$$

elle représente un paraboloïde hyperbolique.