

S. HOTT

Sur un problème proposé par M. E. Amigues

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 488-490

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__488_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN PROBLÈME PROPOSÉ PAR M. E. AMIGUES;

PAR M. S. HOTT.

Dans ses *Leçons d'Algèbre à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales*, M. E. Amigues propose le problème suivant après l'étude des séries :

On a deux cercles A et B égaux et tangents et une tangente commune. Dans le triangle curviligne qu'ils forment, on inscrit un cercle C_1 , puis, dans le triangle formé par les cercles A, B, C_1 , on inscrit un cercle C_2 ; ainsi de suite. Expression générale des rayons de ces cercles. Somme de leurs aires.

1. Soient p un entier et R et r_p les rayons des cercles A et C_p . Je pose

$$s_p = r_1 + r_2 + \dots + r_p.$$

Par raison de symétrie, les centres des cercles $C_1, C_2, \dots$ se trouvent sur la tangente aux cercles A et B menée par leur point de contact, et, par suite, la distance de ce point au centre du cercle C_n est égale à

$$R - 2s_{n-1} - r_n.$$

Un théorème connu sur les tangentes et sécantes

menées à un cercle par un même point donne

$$(R - r_1)^2 = r_1(2R + r_1),$$

$$(R - 2s_{n-1} - r_n)^2 = r_n(2R + r_n).$$

D'où

$$r_1 = \frac{R}{4},$$

$$(1) \quad r_n = \frac{(R - 2s_{n-1})^2}{4(R - s_{n-1})}.$$

En calculant, à l'aide de la formule (1), r_2, r_3, r_4 , on remarque que l'expression

$$R - 2s_{n-1}$$

prend successivement les valeurs $\frac{R}{2}, \frac{R}{3}, \frac{R}{4}$.

On est ainsi amené à poser

$$R - 2s_{n-1} = \frac{R}{n};$$

c'est-à-dire

$$s_{n-1} = \frac{R}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

d'où

$$s_n = \frac{R}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

et, par soustraction,

$$(2) \quad r_n = \frac{R}{2n(n+1)}.$$

La formule (2) est vérifiée par les valeurs $\frac{R}{4}, \frac{R}{12}, \frac{R}{24}, \frac{R}{40}$, que l'on obtient en calculant directement r_1, r_2, r_3, r_4 . En la supposant vraie pour les rayons $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$, on a

$$s_{n-1} = \sum_1^{n-1} \frac{R}{2p(p+1)} = \frac{R}{2} \sum_1^{n-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = \frac{R}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right),$$

et la relation (1) devient

$$r_n = \frac{\left(\frac{R}{n}\right)^2}{4 \left(\frac{R}{2} + \frac{R}{2n}\right)} = \frac{R}{2n(n+1)}.$$

La formule (2) est donc exacte.

On peut remarquer que la limite de s_n pour n infini est égale à $\frac{R}{2}$. Ce résultat était facile à prévoir, car la somme des diamètres de tous les cercles $C_1, C_2, \dots$, est évidemment égale à R .

2. Soit S la somme des aires de ces cercles.

$$S = \frac{\pi R^2}{4} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}.$$

En partant de l'identité

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2}{n(n+1)},$$

et s'appuyant sur les formules (1)

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1,$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

on trouve

$$S = \frac{\pi R^2(\pi^2 - 9)}{12}.$$

(1) JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, 2^e édition, t. I, p. 360.