

AUDIBERT

Concours pour les bourses de licence en 1893

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 44-47

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__44_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE EN 1893 (1);

PAR M. AUDIBERT.

I. 1° La tangente à la courbe (c) au point x, y, z ,

$$\frac{X-x}{1} = \frac{Y-y}{2t} = \frac{Z-z}{2t^2}$$

fait avec les axes les angles α, β, γ ; on aura, d'après l'énoncé,

$$\cos \alpha = \frac{1}{2t^2 + 1} = x,$$

$$\cos \beta = \frac{2t}{2t^2 + 1} = y,$$

$$\cos \gamma = \frac{2t^2}{2t^2 + 1} = z.$$

x, y et z désignant les coordonnées d'un point du lieu. On en tire, par l'élimination de t ,

$$x + z = 1, \quad y^2 + 2x^2 = 2x,$$

équations d'un cercle situé dans le plan $x + z = 1$, de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ayant son centre au point $x = \frac{1}{2}, y = 0, z = \frac{1}{2}$.

2° La normale principale est déterminée par l'intersection du plan osculateur

$$(X-x)2t^2 - (Y-y)2t + Z - z = 0,$$

avec le plan normal

$$X - x + (Y - y)2t + (Z - z)2t^2 = 0.$$

(1) Voir 3^e série. t. XII, p. 462.

Son équation peut s'écrire

$$\frac{X-x}{1} = \frac{2t(Y-y)}{2t^2-1} = \frac{Z-z}{-1}.$$

On aura, comme dans le cas précédent,

$$\cos \alpha = \frac{2t}{2t^2+1} = x,$$

$$\cos \beta = \frac{2t^2-1}{2t^2+1} = y,$$

$$\cos \gamma = \frac{-2t}{2t^2+1} = z,$$

d'où les deux équations

$$x+z=0, \quad y^2+2x^2=1,$$

qui représentent un cercle de rayon 1, dans le plan $x+z=0$, et dont le centre est à l'origine.

3° La perpendiculaire au plan osculateur, ou binormale au point x, y, z de la courbe (c) , a pour équation

$$\frac{X-x}{2t^2} = \frac{Y-y}{-2t} = \frac{Z-z}{1}.$$

On aura encore

$$\cos \alpha = \frac{2t^2}{2t^2+1} = x,$$

$$\cos \beta = \frac{-2t}{2t^2+1} = y,$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{2t^2+1} = z,$$

et l'élimination de t donne, comme dans le premier cas,

$$x+z=1, \quad y^2+2x^2=2x.$$

II. Une des bissectrices de l'angle formé par la tangente et la binormale au point x, y, z de (c) ,

$$Y=y, \quad Z=X+z-x,$$

fait avec les axes les angles fixes $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$.

L'équation de la surface cylindrique qu'elle forme en s'appuyant sur (c) s'obtiendra en éliminant x, y et z entre ses équations et celles de la courbe (c),

$$3y = x^2, \quad 9z = 2xy.$$

La résultante est

$$Y(2y - 9)^2 = 27(Z - X)^2.$$

L'équation de la projection sur le plan des XY de la section de cette surface par le plan $Z + X = a$ sera

$$(1) \quad Y(2y - 9)^2 = 27(a - 2X)^2.$$

Rapportons cette courbe à deux axes situés dans son plan $Z + X = a$, l'axe des abscisses étant la trace de ce plan sur les XZ , celui des ordonnées la perpendiculaire à cette trace élevée au point où la bissectrice de l'angle des XZ la rencontre.

Soient ξ et η les nouvelles coordonnées, les formules de transformation

$$X = \frac{a}{2} - \frac{\xi}{\sqrt{2}}, \quad Y = \eta,$$

introduites dans (1), donneront l'équation de la section droite

$$\eta(2\eta - 9)^2 = 54\xi^2.$$

Cette courbe située dans la région des ordonnées positives est symétrique par rapport à l'axe des η ; elle est tangente à l'origine à l'axe des ξ . Au point $\xi = 0$, $\eta = \frac{9}{2}$, elle a un nœud où se croisent deux branches allant à l'infini. Les deux tangentes ont au nœud les coefficients angulaires $\pm \sqrt{3}$.

III. Le plan contenant à la fois la binormale et la tangente au point x, y, z de la courbe (c) est représenté

par l'équation

$$t(4t^2 + 2)(X - x) + (4t^4 - 1)(Y - y) \\ - t(4t^2 + 2)(Z - z) = 0,$$

qui devient, en remplaçant x , y et z par leurs valeurs en t ,

$$2tX + (2t^2 - 1)Y - 2tZ - t^2(2t^2 + 3) = 0.$$

Soit donné un point fixe ($t = a$) sur la courbe (c); écrivons que ce point est sur le plan, nous aurons la condition

$$6at + 3a^2(2t^2 - 1) - 4a^3t - t^2(2t^2 + 3) = 0$$

ou

$$(t - a)^2(2t^2 + 4at + 3) = 0.$$

Le second facteur du premier membre égalé à zéro donnera deux valeurs de t (autres que a) qui annuleront cette équation. On en conclut que d'un point quelconque ($t = a$) de la courbe (c) on peut mener deux plans remplissant les conditions de l'énoncé. Pour que ces plans soient réels, il faudra avoir $a^2 > \frac{3}{2}$.