

PAUL APPELL

Sur les conditions qui expriment qu'un système de trois axes est trirectangle

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13 (1894), p. 41-43

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__41_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LES CONDITIONS QUI EXPRIMENT QU'UN SYSTÈME
DE TROIS AXES EST TRIRECTANGLE;**

PAR M. PAUL APPELL.

1. On donne, dans tous les traités de Géométrie analytique, les conditions nécessaires et suffisantes qui doivent exister entre les neuf cosinus des angles que forme un système de trois axes avec trois axes *rectangulaires*, pour que ce système de trois axes forme un trièdre trirectangle; mais il peut être utile de connaître les conditions nécessaires et suffisantes qui doivent exister entre les neuf cosinus des angles que fait un premier système de trois axes avec un second système, *non supposé rectangulaire*, pour que les deux systèmes forment des trièdres trirectangles ou pour que l'un d'eux forme un trièdre trirectangle.

Voici une solution sommaire de cette question, qui a été posée par M. Boussinesq.

2. Soient $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$ les cosinus des angles que font entre eux deux systèmes d'axes quelconques $Oxyz$ et $Ox_1y_1z_1$. Considérons un autre système d'axes auxiliaires $OXYZ$ supposé rectangulaire, et soient

$$a, b, c: a', b', c': a'', b'', c''$$

les cosinus des angles des axes Ox, Oy, Oz avec OX, OY, OZ ;

$$a_1, b_1, c_1: a'_1, b'_1, c'_1: a''_1, b''_1, c''_1$$

les cosinus des angles des axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 avec OX, OY, OZ .

On a, d'après des formules élémentaires,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = a a_1 + b b_1 + c c_1, \\ \beta = a a'_1 + b b'_1 + c c'_1, \\ \dots\dots\dots, \\ \gamma'' = a'' a''_1 + b'' b''_1 + c'' c''_1. \end{array} \right.$$

On sait, d'autre part, que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

a une signification géométrique remarquable ; il est, en valeur absolue, égal au volume du parallélépipède ayant pour arêtes des segments de longueur 1 portés sur les axes Ox , Oy , Oz ; si l'on appelle Ox' la normale au plan yOz , on a

$$D = \pm \sin \widehat{yOz} \cos \widehat{xOx'}.$$

D'après cela, le déterminant D , qu'on nomme quelquefois sinus du trièdre $Oxyz$, est, en valeur absolue, moindre que l'unité, sauf dans le cas particulier où le trièdre $Oxyz$ est trirectangle : alors $D = \pm 1$.

Donc, pour exprimer, sous forme condensée, qu'un trièdre réel $Oxyz$ est trirectangle, il faut et il suffit que l'on écrive $D = \pm 1$.

Cela posé, si l'on appelle de même D_1 le sinus du trièdre $Ox_1y_1z_1$,

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a''_1 & b''_1 & c''_1 \end{vmatrix},$$

et si l'on pose

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix},$$

la règle de multiplication des déterminants donne, en vertu des relations (1),

$$(2) \quad \Delta = DD_1.$$

Le déterminant Δ est donc, en valeur absolue, moindre que l'unité, excepté quand les deux trièdres $Oxyz$ et $Ox_1y_1z_1$ sont trirectangles : alors $\Delta = \pm 1$.

3. Pour que les deux trièdres réels $Oxyz$, $Ox_1y_1z_1$ soient trirectangles, il faut et il suffit que

$$(3) \quad \Delta = \pm 1.$$

Cette condition montre que les six relations classiques

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1, \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \\ \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0, \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0, \end{cases}$$

qui ont lieu nécessairement quand les deux trièdres $Oxyz$ et $Ox_1y_1z_1$ sont trirectangles, sont suffisantes pour qu'il en soit ainsi; car elles entraînent la condition $\Delta = \pm 1$.

4. Pour que le trièdre $Ox_1y_1z_1$ soit trirectangle, $Oxyz$ ne l'étant pas, il faut et il suffit que $D_1 = \pm 1$, c'est-à-dire, d'après (2),

$$(5) \quad \Delta = \pm D.$$

Ainsi, il faut et il suffit, pour que $Ox_1y_1z_1$ soit trirectangle, que le déterminant Δ des neuf cosinus soit égal, en valeur absolue, au sinus du trièdre $Oxyz$.

Comme dans le cas précédent, cette condition est équivalente à plusieurs relations distinctes.