

GENTY

**Solution de la question de mathématiques
spéciales posée au concours
d'agrégation en 1893**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 399-404

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__399_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
POSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1895;**

PAR M. GENTY.

On considère un hyperboloïde à une nappe H et le cône S qui est l'enveloppe des plans normaux aux génératrices de cet hyperboloïde menés par un point donné M .

1° Déterminer les sommets du tétraèdre $MM_1M_2M_3$ conjugué par rapport à toutes les quadriques qui passent par l'intersection de l'hyperboloïde H et du cône S .

Trouver le lieu C des sommets M_1, M_2, M_3 de ce tétraèdre lorsque, le point M restant fixe, l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné.

2° Trouver la surface engendrée par la ligne C lorsque le point M décrit une droite donnée D , et déterminer les positions qu'il faut donner à cette droite D pour que cette surface soit de révolution.

3° Déterminer les coordonnées du centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $MM_1M_2M_3$ en fonc-

tion des coordonnées du point M pour un hyperboloïde donné H .

Trouver le lieu de ce centre ω lorsque, le point M restant fixe, l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné.

4° Démontrer que la droite qui joint le centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $MM_1M_2M_3$ au centre de gravité G de ce tétraèdre passe par un point fixe I lorsque, le point M restant fixe, l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné, et faire voir que le point G est le milieu de ωI .

1° Soient

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

l'équation de l'hyperboloïde H ; x' , y' et z' les coordonnées du point M ; l'équation du cône S sera

$$\frac{(x-x')^2}{A} + \frac{(y-y')^2}{B} + \frac{(z-z')^2}{C} = 0,$$

et, si l'on désigne par α , β , γ les coordonnées de l'un des sommets du tétraèdre autopolaire commun à l'hyperboloïde et au cône, les plans polaires de ce point par rapport aux deux surfaces auront respectivement pour équations

$$Ax\alpha + B\beta y + C\gamma z = 1,$$

$$\frac{(\alpha-x')(x-x')}{A} + \frac{(\beta-y')(y-y')}{B} + \frac{(\gamma-z')(z-z')}{C} = 0.$$

Ces deux équations devant être identiques, on aura

$$\frac{A^2\alpha}{\alpha-x'} = \frac{B^2\beta}{\beta-y'} = \frac{C^2\gamma}{\gamma-z'} = \frac{1}{\frac{x'(\alpha-x')}{A} + \frac{y'(\beta-y')}{B} + \frac{z'(\gamma-z')}{C}} = t,$$

ou encore

$$(1) \quad \alpha = \frac{tx'}{t-A^2}, \quad \beta = \frac{ty'}{t-B^2}, \quad \gamma = \frac{tz'}{t-C^2},$$

$$(2) \quad A\alpha x' + B\beta y' + C\gamma z' = 1.$$

Si l'on regarde t comme un paramètre arbitraire, les équations (1) représentent une cubique gauche C , et l'équation (2) le plan polaire du point M par rapport à l'hyperboloïde.

Les points cherchés M_1 , M_2 et M_3 sont les points de la cubique situés dans ce plan, et les valeurs correspondantes de t sont les racines de l'équation

$$\frac{Ax'^2t}{A^2-t} + \frac{By'^2t}{B^2-t} + \frac{Cz'^2t}{C^2-t} + 1 = 0.$$

Si dans les équations (1) nous remplaçons A , B et C par kA , kB et kC respectivement, elles représenteront évidemment encore la même courbe. Donc la cubique gauche C est le lieu des points M_1 , M_2 et M_3 , lorsque l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné. Cette courbe passe à l'origine pour $t = 0$, au point M pour $t = \infty$, et ses asymptotes sont parallèles aux axes de l'hyperboloïde.

2° Si dans les équations de la cubique C nous remplaçons x' , y' et z' par $x' + kX$, $y' + kY$ et $z' + kZ$ respectivement, X , Y et Z étant les cosinus directeurs d'une droite D , elles deviennent

$$\alpha = \frac{t(x' + kX)}{t - A^2}, \quad \beta = \frac{t(y' + kY)}{t - B^2}, \quad \gamma = \frac{t(z' + kZ)}{t - C^2}$$

ou

$$A^2\alpha + t(x' - \alpha) + ktX = 0,$$

$$B^2\beta + t(y' - \beta) + ktY = 0,$$

$$C^2\gamma + t(z' - \gamma) + ktZ = 0.$$

En éliminant k et t entre ces équations, il vient

$$\begin{vmatrix} A^2\alpha & B^2\beta & C^2\gamma \\ X & Y & Z \\ \alpha - x' & \beta - y' & \gamma - z' \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{aligned} & (B^2 - C^2)X\beta\gamma + (C^2 - A^2)Y\gamma\alpha + (A^2 - B^2)Z\alpha\beta \\ & + A^2\alpha(Yz' - Zy') + B^2\beta(Zx' - Xz') \\ & + C^2\gamma(Xy' - Yx') = 0, \end{aligned}$$

équation d'un hyperboloïde équilatère, qui contient la droite D et passe par l'origine.

Pour que cet hyperboloïde soit de révolution, il faut qu'on ait

$$\pm (B^2 - C^2)X = \pm (C^2 - A^2)Y = \pm (A^2 - B^2)Z,$$

équation de quatre directions fixes.

L'hyperboloïde, lieu des cubiques gauches C, sera donc de révolution quand le point M parcourra une droite parallèle à l'une de ces directions.

3° Si nous portons l'origine au point M, les équations qui déterminent les points M₁, M₂ et M₃ deviennent

$$(3) \quad h^2 yz + B^2 y'z - C^2 z'y = 0,$$

$$(4) \quad k^2 zx + C^2 z'x - A^2 x'z = 0,$$

$$(5) \quad l^2 xy + A^2 x'y - B^2 y'x = 0,$$

$$Axx' + Byy' + Czz' - S = 0,$$

où l'on a posé

$$h^2 = B^2 - C^2, \quad k^2 = C^2 - A^2, \quad l^2 = A^2 - B^2,$$

$$S = 1 - Ax'^2 - By'^2 - Cz'^2.$$

L'équation générale des quadriques circonscrites au tétraèdre MM₁M₂M₃ est alors de la forme

$$\begin{aligned} & \lambda(h^2 yz + B^2 y'z - C^2 z'y) + \mu(k^2 zx + C^2 z'x - A^2 x'z) \\ & + \nu(l^2 xy + A^2 x'y - B^2 y'x) \\ & + (mx + ny + pz)(Axx' + Byy' + Czz' - S) = 0. \end{aligned}$$

Les conditions pour que cette quadrique soit une sphère sont

$$\begin{aligned} \Lambda m x' &= B n y' = C p z', \\ \lambda h^2 + B p y' + C n z' &= 0, \\ \mu k^2 + C m z' + A p x' &= 0, \\ \nu l^2 + A n x' + B m y' &= 0. \end{aligned}$$

On peut prendre pour la valeur commune des coefficients de x^2 , y^2 et z^2 l'expression $ABCx'y'z'$, et alors on a

$$\begin{aligned} m &= BC y' z', & n &= CA z' x', & p &= AB x' y'. \\ \lambda &= - \frac{\Lambda x' (B^2 y'^2 + C^2 z'^2)}{h^2}, \\ \mu &= - \frac{B y' (C^2 z'^2 + A^2 x'^2)}{k^2}, \\ \nu &= - \frac{C z' (A^2 x'^2 + B^2 y'^2)}{l^2}; \end{aligned}$$

et si l'on désigne par x_ω l'abscisse du centre ω de la sphère circonscrite au tétraèdre $MM_1M_2M_3$, on aura

$$x_\omega = \frac{C l^2 (C^2 z'^2 + A^2 x'^2) - B k^2 (A^2 x'^2 + B^2 y'^2) + l^2 k^2 (1 - \Lambda x'^2 - B y'^2 - C z'^2)}{2 \Lambda l^2 k^2 x'};$$

les expressions de y_ω et de z_ω se déduiront de celle de x_ω par une simple permutation circulaire.

Si maintenant, dans l'équation qui précède, on remplace A , B et C par tA , tB et tC , respectivement, il vient

$$x_\omega = \frac{\left\{ t [C l^2 (C^2 z'^2 + A^2 x'^2) - B k^2 (A^2 x'^2 + B^2 y'^2) - l^2 k^2 (A^2 x'^2 + B^2 y'^2 + C^2 z'^2)] + l^2 k^2 \right\}}{2 t \Lambda l^2 k^2 x'}.$$

Donc, lorsque l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné, le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $MM_1M_2M_3$ décrit une droite.

4° Cherchons maintenant le centre de gravité G de ce tétraèdre.

Si nous portons dans l'équation (5) les valeurs de y et de z tirées des équations (3) et (4), il vient

$$Axx' + \frac{B^3 y'^2 x}{A^2 x' + l^2 x} + \frac{C^3 z'^2 x}{A^2 x' - k^2 x} - S = 0;$$

et si x_1 , x_2 et x_3 sont les racines de cette équation et x_G l'abscisse du point G, on aura

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4},$$

ou

$$x = \frac{A^3 x'^2 (l^2 - k^2) - B^3 k^2 y'^2 + C^3 l^2 z'^2 + l^2 k^2 (1 - A x'^2 - B y'^2 - C z'^2)}{4 A l^2 k^2 x'};$$

on obtiendrait y_G et z_G par une permutation circulaire.

Si, dans l'expression de x_G , on remplace A, B et C par tA , tB et tC , respectivement, il vient

$$x_G = \frac{t[A^3 x'^2 (l^2 - k^2) - B^3 k^2 y'^2 + C^3 l^2 z'^2 - l^2 k^2 (A x'^2 + B y'^2 + C z'^2)] + l^2 k^2}{4 t A l^2 k^2 x'};$$

on voit donc que le lieu du point G est aussi une droite.

On reconnaît immédiatement que l'expression $2x_G - x_\omega$ est indépendante de t ; donc, lorsque l'hyperboloïde H se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné, la droite ωG passe par un point fixe I et le point G est le milieu de ωI . En d'autres termes, le centre de l'hyperboloïde des hauteurs du tétraèdre $MM_1 M_2 M_3$ est un point fixe.

Note. — Solution analogue par M. Gambey. M. Leinekugel, élève ingénieur hydrographe de la Marine, nous a envoyé une solution analytique et une solution géométrique d'une généralisation de cette même question. Nous donnerons sa solution géométrique dans le prochain numéro.