

ANDRÉ CAZAMIAN

Sur un théorème de M. Faure

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 324-348

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__324_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN THÉORÈME DE M. FAURE;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

Dans une Note précédente, nous avons prouvé que le théorème de M. Faure sur les cercles circonscrits aux triangles conjugués par rapport à une conique était un cas particulier d'une propriété plus étendue, qui peut ainsi s'énoncer :

1. *Étant donnés une conique S et deux points A, B , si l'on considère la conique Σ harmonique ⁽¹⁾ de S par rapport à (AB) , toute conique Γ passant par A, B , et circonscrite à un triangle quelconque conjugué à S , coupe Σ en deux points tels que les tangentes à Γ et Σ en chacun de ces points soient conjuguées par rapport aux droites les joignant à A et B .*

(1) Nous appelons *conique harmonique* de deux coniques S et S_1 le lieu des points tels que les tangentes issues de chacun d'eux à S et S_1 forment un faisceau harmonique. Dans le cas où la conique S_1 est formée par deux points A, B , la conique harmonique est celle qui passe par A, B et les points de contact des tangentes à S menées par A et B .

Si les points A et B sont les ombilics du plan, la conique harmonique Σ est le cercle orthoptique de S; on obtient alors le théorème Faure. Ce théorème conduit lui-même à une foule de conséquences intéressantes et permet de retrouver beaucoup de propositions connues, mais ne paraissant avoir aucun lien les unes avec les autres, et qui devront être ainsi envisagées comme des corollaires d'un théorème plus général. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, d'étudier les nombreux corollaires du théorème Faure.

I. Auparavant, et pour pouvoir en faire simultanément l'étude, nous allons parler d'un autre théorème général intimement lié au théorème 1, puisqu'il peut en être déduit. C'est la proposition suivante :

2. *Étant donnés une conique S et deux points fixes A, B, si l'on considère la conique Σ harmonique de S par rapport à A et B, toute conique Γ CONJUGUÉE par rapport à un triangle CIRCONSCRIT à S et passant par A, B coupe Σ en deux points tels que les tangentes à Γ et Σ en chacun de ces points soient conjuguées par rapport aux droites les joignant aux points A et B.*

Cette propriété résulte de ce fait qu'une conique S étant inscrite dans un triangle conjugué à Γ , cette seconde conique Γ est harmoniquement circonscrite à la première. La démonstration en est simple. Considérons une conique S inscrite dans un triangle ABC conjugué à une conique Γ . Le point C, pôle de la tangente AB à S par rapport à Γ , est un point tel que les tangentes menées de ce point à S et Γ forment un faisceau harmonique. Il en est de même pour les points A, B et pour les points de contact des tangentes communes à S et Γ . Il en résulte que la conique Σ harmonique de S et Γ est

en même temps la polaire réciproque de S par rapport à Γ : donc le pôle d'une tangente quelconque à S par rapport à Γ étant sur Σ est un point tel que les tangentes menées de ce point à S et Γ forment un faisceau harmonique. (C'est le théorème connu : *Lorsqu'il existe un triangle circonscrit à une conique et conjugué à une autre, il existe une infinité de triangles analogues.*)

Transformons alors par polaires réciproques en prenant pour conique directrice une conique telle que S se transforme en Γ . On obtient cette propriété de S : les polaires de tous ses points par rapport à Γ sont divisées harmoniquement par les deux coniques, ce qui montre que S est circonscrite à des triangles conjugués à Γ .

Dans le cas particulier où les points A, B sont les points cycliques, la conique harmonique de S par rapport à (AB) étant son cercle orthoptique, on obtient le théorème suivant :

3. *Les cercles conjugués aux triangles circonscrits à une conique coupent orthogonalement le cercle orthoptique de la conique.*

D'autre part, le théorème Faure et le théorème précédent peuvent encore s'énoncer ainsi :

4. *Les cercles orthoptiques des coniques conjuguées par rapport à un triangle coupent orthogonalement le cercle circonscrit au triangle.*

Les cercles orthoptiques des coniques inscrites dans un triangle coupent orthogonalement le cercle conjugué au triangle.

Lorsque deux cercles se coupent orthogonalement, la puissance du centre de l'un par rapport à l'autre est égale au carré de son rayon. Or le centre du cercle orthoptique est le centre de la conique, et le carré de

son rayon est la somme des carrés des demi-axes de la conique. De là les corollaires suivants, qui ne sont que des manières différentes d'énoncer les théorèmes de M. Faure.

La puissance du centre d'une conique conjuguée à un triangle par rapport au cercle circonscrit est égale à la somme des carrés de ses demi-axes.

Le lieu des centres des coniques conjuguées à un triangle et dont la somme des carrés des demi-axes est constante est un cercle concentrique au cercle circonscrit au triangle.

La puissance du centre d'une conique inscrite dans un triangle par rapport au cercle conjugué est égale à la somme des carrés de ses demi-axes.

Le lieu des centres des coniques inscrites dans un triangle et dont la somme des carrés des demi-axes est constante est un cercle ayant pour centre l'orthocentre du triangle.

Ce dernier théorème a été donné pour la première fois par Steiner.

Lorsque deux triangles sont circonscrits à une conique, l'axe radical des cercles conjugués passe par le centre de la conique.

Lorsque deux triangles sont conjugués à une conique, l'axe radical des cercles circonscrits passe par le centre de la conique.

Lorsqu'une conique inscrite dans un triangle est conjuguée par rapport à un autre triangle, son centre appartient à l'axe radical du cercle conjugué au premier et du cercle circonscrit au second.

On pourra aussi énoncer des relations métriques évidentes :

Entre la distance d du centre d'une conique inscrite dans un triangle à l'orthocentre du triangle, le rayon ρ du cercle conjugué au triangle et la somme s^2 des carrés des demi-axes de la conique, existe la relation

$$d^2 = \rho^2 + s^2.$$

Entre la distance D du centre d'une conique conjuguée à un triangle au centre du cercle circonscrit, le rayon R de ce cercle et la somme s^2 des carrés des demi-axes de la conique, existe la relation

$$D^2 = R^2 + s^2.$$

En particulier, on aura des relations entre la distance du centre du cercle inscrit à l'orthocentre, le rayon r de ce cercle et le rayon ρ du cercle conjugué :

$$d^2 = \rho^2 + 2r^2,$$

entre la distance D de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit, le rayon ρ et le rayon R du cercle circonscrit :

$$D^2 = R^2 + 2\rho^2.$$

Les propriétés connues des cercles orthogonaux donnent aussi quelques théorèmes relatifs aux cercles orthoptiques, par exemple :

Les polaires d'un point du cercle orthoptique d'une conique par rapport à tous les cercles circonscrits aux triangles conjugués et à tous les cercles conjugués aux triangles circonscrits passent par un même point, qui est le symétrique du point considéré par rapport au centre de la conique.

En appliquant les deux théorèmes fondamentaux au cercle, on retrouve des propriétés particulières de Géométrie élémentaire. Par exemple, la puissance de l'or-

thocentre par rapport au cercle circonscrit est égale au double du carré du rayon du cercle conjugué, c'est-à-dire que, si H est l'orthocentre, A un sommet, P le pied de la hauteur HA et R le point où cette hauteur rencontre le cercle circonscrit, on aura

$$HA \times HR = 2 HA \times HP \quad \text{ou} \quad HR = 2 HP,$$

c'est-à-dire que le symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté est situé sur le cercle circonscrit.

II. Deux coniques particulières, l'hyperbole équilatère et la parabole, ont des cercles orthoptiques particuliers. Celui de la première est réduit à un point, le centre de la courbe ; celui de la seconde est dégénéré en une droite, la directrice. Or, une circonférence qui coupe orthogonalement un cercle réduit à un point passe par ce point, et toute droite coupant orthogonalement un cercle est diamètre de ce cercle. De là la série des corollaires suivants déjà obtenus directement de tant de façons différentes, *mais qui ne sont que des conséquences très particulières d'un théorème général* :

Le cercle circonscrit à un triangle conjugué par rapport à une hyperbole équilatère passe par le centre de la courbe.

Le lieu des centres des hyperboles équilatères conjuguées à un triangle est le cercle circonscrit au triangle.

Le cercle conjugué à un triangle circonscrit à une hyperbole équilatère passe par le centre de la courbe.

Le lieu des centres des hyperboles équilatères inscrites dans un triangle est le cercle conjugué au triangle.

Les directrices des paraboles conjuguées à un tri-

angle passent par le centre du cercle circonscrit au triangle.

Le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles conjugués à une parabole est la directrice.

Les directrices des paraboles inscrites dans un triangle passent par l'orthocentre du triangle.

Le lieu des orthocentres des triangles circonscrits à une parabole est la directrice.

Il est bien connu que le lieu des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est le cercle des neuf points du triangle. Cela provient encore de ce que les hyperboles équilatères circonscrites à un triangle sont conjuguées par rapport au triangle formé en joignant les pieds des hauteurs du premier. En effet, les hyperboles équilatères circonscrites au triangle ABC passent par l'orthocentre H. Soient P, R, K les pieds des trois hauteurs CH, AH, BH. La droite KR joignant les points d'intersection avec l'hyperbole des deux sécantes APB, PHC, est la polaire du point P. Le triangle PKR est conjugué à toutes les hyperboles équilatères du faisceau. D'où il résulte que les centres de ces hyperboles sont situés sur le cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs, qui n'est autre que le cercle des neuf points.

Ainsi, les théorèmes Faure conduisent immédiatement au lieu des centres des hyperboles équilatères inscrites, conjuguées et circonscrites à un triangle.

III. Si l'on assujettit les coniques inscrites ou conjuguées à un triangle à une autre condition, et qu'on détermine le lieu des centres de ces coniques, on connaîtra par cela même la déférente de l'anallagmatique enveloppe des cercles orthoptiques de ces coniques. Nous examinerons bientôt deux cas intéressants, celui des co-

niques circonscrites et inscrites à un quadrilatère, qui permettront de retrouver plusieurs théorèmes connus. Dans certains cas particuliers, la nature de la condition à laquelle seront assujetties les coniques inscrites ou conjuguées amènera à la fois la connaissance de l'enveloppe des cercles orthoptiques et du lieu de leurs centres, c'est-à-dire du lieu des centres des coniques.

Par exemple, si les cercles orthoptiques des coniques inscrites dans un triangle coupent orthogonalement un cercle fixe donné, il en résultera que ces cercles orthoptiques passeront par deux points fixes, les points de Poncet relatifs au cercle donné et au cercle conjugué au triangle : le lieu des centres des coniques sera donc alors une droite. Plus particulièrement, supposons que l'on considère les coniques inscrites dans un triangle et vues d'un point fixe P sous un angle droit. Les cercles orthoptiques de ces coniques passant par un point fixe et coupant orthogonalement le cercle conjugué au triangle auront leurs centres situés sur une droite, l'axe radical du cercle-point P et du cercle conjugué, c'est-à-dire la droite équidistante du point P et de sa polaire par rapport au cercle conjugué. Tous ces cercles passeront donc par un second point fixe situé sur la droite PH (H désignant l'orthocentre du triangle), au point de rencontre de cette droite et de la polaire du point P par rapport au cercle conjugué. Il en résulte que les coniques inscrites dans un triangle et vues d'un point fixe P sous un angle droit sont vues d'un autre point fixe P' sous un angle droit ; la droite PP' passe constamment par le centre du cercle conjugué, c'est-à-dire par l'orthocentre du triangle, et le produit $HP \times HP'$, puissance du centre du cercle conjugué par rapport aux cercles orthoptiques, qu'il coupe orthogonalement, est constant et égal au carré de son rayon (*Concours d'agrégation de 1890*).

Le théorème de M. Faure conduirait, par un raisonnement analogue, à des propriétés du même genre, de sorte qu'on peut énoncer la proposition suivante :

Les coniques $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{inscrites} \\ \text{conjuguées} \end{smallmatrix} \right\}$ à un triangle et vue, d'un point fixe P sous un angle droit sont vues d'un autre point fixe P' sous un angle droit; lorsque le point P se déplace dans le plan, la droite PP' passe par un point fixe $\left\{ \begin{smallmatrix} H, \text{ orthocentre du triangle} \\ O, \text{ centre du cercle circonscrit} \end{smallmatrix} \right\}$ et le produit $\left\{ \begin{smallmatrix} HP \times HP' \\ OP \times OP' \end{smallmatrix} \right\}$ reste constant et égal au carré du rayon $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{du cercle conjugué} \\ \text{du cercle circonscrit} \end{smallmatrix} \right\}$.

IV. *Corollaires relatifs aux faisceaux de coniques.*
— Toutes les coniques passant par quatre points fixes sont conjuguées au triangle obtenu par l'intersection des droites joignant ces points deux à deux : c'est le triangle diagonal du quadrangle. Les coniques d'un faisceau étant conjuguées par rapport à un triangle fixe, en appliquant le théorème de M. Faure, on obtient les corollaires suivants :

La somme des carrés des demi-axes d'une conique circonscrite à un quadrangle est égale à la puissance de son centre par rapport au cercle circonscrit au triangle diagonal.

Le lieu des centres des coniques passant par quatre points fixes et dont la somme des carrés des demi-axes est constante est un cercle.

L'axe radical des cercles orthoptiques relatifs à deux coniques quelconques d'un faisceau passe par un point fixe.

L'enveloppe des cercles orthoptiques des coniques

d'un faisceau est une anallagmatique ayant pour déférente la conique des neuf points du faisceau.

Les directrices des deux paraboles circonscrites à un quadrangle passent par le centre du cercle circonscrit au triangle diagonal.

Il existe une hyperbole équilatère dans le faisceau. Son centre sera situé sur le cercle circonscrit au triangle diagonal. On retrouve ce théorème :

4. Les quatre cercles des neuf points des quatre triangles ayant pour sommets trois des quatre points donnés se coupent en un même point situé sur le cercle circonscrit au triangle diagonal du quadrangle.

Coniques tangentes à quatre droites. — Ces coniques sont toutes conjuguées par rapport au triangle formé par les diagonales du quadrilatère complet : c'est le triangle des diagonales.

Les corollaires des théorèmes 3 et 4 seront les suivants :

La somme des carrés des demi-axes d'une conique inscrite dans un quadrilatère est égale à la puissance de son centre par rapport au cercle circonscrit au triangle des diagonales.

Les cercles orthoptiques des coniques inscrites dans un quadrilatère coupent orthogonalement : 1° le cercle circonscrit au triangle des diagonales ; 2° les cercles conjugués aux quatre triangles formés par trois des quatre droites. Donc :

Dans un quadrilatère, le cercle circonscrit au triangle des diagonales et les cercles conjugués aux tri-

angles formés par trois des quatre côtés ont le même axe radical.

Les cercles orthoptiques des coniques inscrites dans un quadrilatère coupent orthogonalement des cercles ayant le même axe radical, il en résulte que le lieu de leurs centres est cet axe radical : donc le lieu des centres des coniques inscrites dans un quadrilatère est une droite.

L'axe radical commun des cercles orthoptiques est la droite joignant les orthocentres de deux des quatre triangles formés par les quatre côtés du quadrilatère : c'est donc la directrice de la parabole inscrite, cercle de rayon infini de la série. Les deux cercles de rayon nul de la série sont les cercles orthoptiques des deux hyperboles équilatères inscrites, c'est-à-dire les centres de ces hyperboles, qui sont les points communs au cercle circonscrit au triangle des diagonales et aux cercles conjugués aux quatre triangles formés par trois des quatre côtés. On retrouve ainsi la série des résultats suivants :

Les cercles orthoptiques des coniques inscrites dans un quadrilatère forment une famille de cercles, à laquelle appartiennent les cercles décrits sur les trois diagonales du quadrilatère comme diamètres, et qui ont deux à deux le même axe radical. Cet axe radical commun est la directrice de la parabole inscrite dans le quadrilatère, les deux cercles limites de la famille sont les centres des deux hyperboles équilatères inscrites. La série orthogonale a pour axe radical la droite de Newton; elle renferme les cercles conjugués aux quatre triangles formés par trois des quatre côtés du quadrilatère et le cercle circonscrit au triangle des diagonales.

On sait que les coniques tangentes à une droite et conjuguées à un triangle sont tangentes à trois autres droites déterminées. Donc :

Les coniques conjuguées à un triangle et tangentes à une droite sont vues de deux points fixes sous des angles droits.

V. *Corollaires relatifs à une conique et à des triangles conjugués particuliers.* — En appliquant le théorème de M. Faure à des triangles conjugués particuliers, nous allons obtenir des propriétés intéressantes.

D'un point P, menons les deux tangentes PA, PB à une conique (c) de centre O. En prenant un point L sur AB, et en construisant sa polaire PM, on obtient un triangle conjugué PLM. Si le point L vient en A, les deux droites PL et PM sont confondues avec PA et le triangle conjugué est alors formé par la droite double PA et la polaire AB du point P. Le cercle circonscrit à ce triangle est le cercle passant en P et tangent au point A à la polaire AB. Son centre est à l'intersection de la perpendiculaire en A à AB et de la perpendiculaire au milieu de PA. De là les énoncés suivants :

Si d'un point P on mène la tangente PA à une conique, le cercle Σ passant en P et tangent au point A à la polaire du point P coupe orthogonalement le cercle orthoptique de la conique. Si la conique est une hyperbole équilatère, ce cercle passe par le centre.

Si d'un point P on mène la tangente PA à une parabole, la perpendiculaire au milieu de PA et la perpendiculaire en A à la polaire du point P se coupent sur la directrice.

Si A est un point d'une conique de centre O, P le pôle de la normale au point A, I le milieu de AP, on a

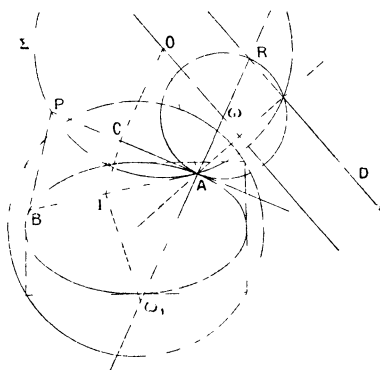
la relation

$$\overline{OI}^2 - \overline{AI}^2 = a^2 + b^2,$$

a et b étant les demi-axes de la conique, car, lorsque le point P est le pôle de la normale en A , le cercle Σ est le cercle de diamètre PA .

Supposons maintenant qu'un point P se déplace sur la tangente au point A d'une conique. Les cercles Σ passant en P et tangents en A à la polaire du point P coupent tous orthogonalement le cercle orthoptique, donc le lieu de leurs centres est l'axe radical du point A et du cercle orthoptique, c'est-à-dire la droite équidistante du point A et de sa polaire par rapport au cercle orthoptique. Soit ω le point de rencontre de cette droite avec la normale en A .

Fig. 1.



Le cercle de centre ω et de rayon ωA est tangent en A à la conique, c'est la position limite du cercle Σ lorsque le point P est venu se confondre avec le point A . Considérons maintenant le cercle ω_1 tangent en A à la conique et passant par le point B . Son centre est à l'intersection de la normale en A avec la perpendiculaire au milieu I de AB .

Les deux triangles AOC, AI ω_1 sont semblables : on a la proportion

$$\frac{AO}{A\omega_1} = \frac{AC}{AI} = \frac{AP}{AB}.$$

Le rapport des rayons du cercle Σ et du cercle ω_1 est donc égal à $\frac{AP}{AB}$. Or, lorsque le point B est venu se confondre avec le point A, le cercle ω_1 est devenu le cercle osculateur en A, le cercle Σ est devenu le cercle ω . D'autre part, on a

$$\lim \frac{AP}{AB} = \frac{1}{2},$$

ce qui peut s'établir soit par des considérations de Géométrie infinitésimale, en remarquant que l'on a

$$\lim \frac{PA + PB}{AB} = 1 \quad \text{et} \quad \lim \frac{PA}{PB} = \lim \frac{\sin A}{\sin B} = 1,$$

soit encore de la façon suivante : Rapportée à la tangente et à la normale en A, la conique a pour équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dy = 0.$$

Soit $y = mx$ l'équation de AB. En faisant $y = mx$ dans l'équation, on a pour abscisse du point B

$$x = - \frac{2dm}{a + 2bm + cm^2},$$

donc

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{-2dm}{a + 2bm + cm^2} \times \sqrt{1 + m^2}.$$

D'autre part, le point P, pôle de AB, a pour abscisse

$$AP = - \frac{dm}{a + bm},$$

donc

$$\frac{AP}{AB} = \frac{a + 2bm + cm^2}{2\sqrt{1 + m^2}(a + bm)}.$$

En faisant $m = 0$, on obtient

$$\lim \frac{AP}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi donc, le diamètre du cercle ω est égal au rayon du cercle osculateur au point A ; ce cercle ω coupe orthogonalement le cercle orthoptique. On peut énoncer les théorèmes suivants :

Le rayon de courbure en un point d'une conique est le double du rayon du cercle tangent en ce point à la conique et qui coupe orthogonalement le cercle orthoptique.

D'autre part, le point ω est le point de rencontre de la normale en A avec la droite équidistante du point A et de sa polaire par rapport au cercle orthoptique, de sorte qu'en portant $\omega R = A\omega$ sur la normale, le point R appartient à la polaire du point A, d'où ce théorème important :

Le rayon de courbure en un point d'une conique est égal à la distance de ce point à son conjugué harmonique par rapport aux points de rencontre de la normale avec le cercle orthoptique.

Dans le cas de l'hyperbole équilatère et de la parabole, on obtient les théorèmes suivants :

Les cercles tangents extérieurement à une hyperbole équilatère, et ayant pour diamètres les rayons de courbure aux points de contact passent par le centre de l'hyperbole.

Le lieu des centres des cercles tangents extérieurement à une parabole et ayant pour diamètres les rayons de courbure aux points de contact est la directrice.

Application à la construction du centre de courbure. — Pour avoir le centre de courbure en un point A d'une conique quelconque, il suffira, d'après ce qu'on a vu, de prendre l'intersection de la normale en A avec la polaire D du point A par rapport au cercle circonscrit au rectangle des axes, et de porter à partir de A, en sens inverse, une longueur égale à la distance du point à la polaire D.

Hyperbole équilatère. — La polaire du point A par rapport au cercle orthoptique, qui est réduit au centre de la courbe, est la droite OD perpendiculaire en O sur le rayon OA. On obtient la construction très simple suivante :

Pour avoir le centre de courbure ω en un point A d'une hyperbole équilatère, prendre $A\omega = AD$, D étant le point de rencontre de la normale avec la perpendiculaire OD élevée du centre O sur le rayon OA.

Parabole. — Son cercle orthoptique est la directrice, la polaire de A est la droite symétrique par rapport à la directrice. On retrouve immédiatement cette construction connue : *Porter sur la normale, à partir de A, une longueur double de la distance du point A à la directrice, comptée sur la normale.*

VI. Il est naturel de se demander si les théorèmes fondamentaux 1 et 2 transformés par dualité ne donneraient pas des énoncés intéressants. On obtient ainsi le théorème suivant :

§. *Étant données une conique S et deux droites Δ ,*

Δ' , si l'on considère la conique Σ enveloppe harmonique ⁽¹⁾ des coniques S et (Δ, Δ') :

1° Toute conique Γ inscrite dans un triangle quelconque conjugué par rapport à S et touchant les droites Δ, Δ' est telle que les points de contact d'une tangente commune à Γ et Σ forment une division harmonique avec les points de rencontre de cette tangente et des droites (Δ, Δ') ;

2° Toute conique Γ , conjuguée à un triangle inscrit dans S jouit de la même propriété.

Dans le cas particulier où les droites (Δ, Δ') sont les droites isotropes issues d'un point F , on obtient les deux théorèmes suivants, qui sont corrélatifs des théorèmes de M. Faure :

6. Si l'on considère les coniques Γ ayant pour foyers un point donné et inscrites dans les triangles conjugués à une conique S , les tangentes communes aux coniques Γ et à une conique fixe Σ ayant avec elles un foyer commun, et qui est l'enveloppe des cordes de S vues du point F sous un angle droit, sont telles que les droites joignant F aux points de contact de la tangente commune avec Σ et Γ sont rectangulaires.

Les coniques Γ , ayant pour foyer le point F et conjuguées aux triangles inscrits dans S jouissent de la même propriété.

On doit à M. Picquet cette propriété que les cercles principaux de deux coniques confocales dont une tangente commune est vue du foyer commun sous un angle droit se coupent orthogonalement. En s'appuyant sur

(1) Nous appelons *enveloppe harmonique* de deux coniques S, S_1 la conique enveloppe des sécantes divisant harmoniquement S et S_1 .

cette propriété et sur le théorème Faure transformé par polaires réciproques, M. Picquet (*Nouvelles Annales*, 2^e série, t. V) a démontré un théorème proposé par M. Mannheim dans les termes suivants :

Si d'un point quelconque on abaisse les perpendiculaires sur les côtés d'un triangle conjugué à une conique, les cercles circonscrits aux triangles formés en joignant les pieds de ces perpendiculaires ont même centre radical.

Le théorème de M. Picquet sur les cercles principaux de deux coniques confocales, dont la démonstration géométrique est très simple, et le théorème corrélatif du théorème Faure, combinés, conduisent, comme on le voit facilement, à la solution immédiate de la question précédente. La propriété intéressante énoncée par M. Mannheim peut donc être considérée comme une conséquence du théorème de M. Faure. Nous allons en étudier les corollaires, après avoir fait quelques remarques préliminaires.

Observons d'abord que le cercle fixe, que tous les cercles (C) circonscrits aux triangles formés par les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point P sur les côtés d'un triangle conjugué quelconque coupent orthogonalement, est le cercle principal de la conique Σ enveloppe des cordes de la conique S vues du point P sous un angle droit. Nous allons déterminer la nature de cette conique Σ dans divers cas particuliers. Pour cela, transformons par polaires réciproques la propriété du cercle orthoptique d'être le lieu des sommets des angles droits circonscrits, en prenant pour cercle directeur :

1^o Un cercle ayant son centre P sur le cercle orthoptique. Alors la transformée de la conique est une hyperbole équilatère, et la transformée du cercle orthoptique

est une parabole de foyer P. La conique Σ , dans le cas de l'hyperbole équilatère, est une parabole. Le cercle principal étant une droite, la tangente au sommet, on peut énoncer le théorème suivant :

Tous les cercles (C), circonscrits aux triangles obtenus en joignant les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe P sur les côtés d'un triangle quelconque conjugué à une hyperbole équilatère ont leurs centres en ligne droite.

2° Prenons pour cercle directeur un cercle ayant son centre au foyer. Alors la transformée de la conique est un cercle (O), la transformée du cercle orthoptique est une conique ayant pour foyers le centre du cercle directeur et le centre du cercle (O). Donc l'enveloppe des cordes d'un cercle vues d'un point fixe P sous un angle droit est une conique ayant pour foyers ce point et le centre O du cercle. Le cercle principal de cette conique a pour centre le milieu de PO. Il en résulte que *tous les cercles (C), circonscrits aux triangles obtenus en joignant les pieds des perpendiculaires menées d'un point fixe P sur les côtés d'un triangle quelconque conjugué à un cercle, ont pour centre radical le milieu de PH, H étant l'orthocentre fixe de tous ces triangles.*

Si le point P est pris sur le cercle circonscrit à un triangle conjugué, le cercle (C) est une droite (la droite de Simson); cette droite, devant couper orthogonalement un cercle ayant son centre au milieu de PH, passera par le centre de ce cercle; on retrouve cette propriété :

La droite de Simson relative à un point P du cercle circonscrit à un triangle est à égale distance de ce point et de l'orthocentre du triangle.

Si le point P est au centre du cercle O, la conique enveloppe Σ est devenue un cercle de centre O, ayant pour rayon $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. Puisque le point O est l'orthocentre de chaque triangle conjugué, les cercles (C) sont les cercles des neuf points de ces triangles; donc :

Les cercles des neuf points des triangles conjugués à un cercle de rayon R coupent orthogonalement le cercle concentrique de rayon $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Supposons maintenant que, pour une conique quelconque, le point P soit situé sur la conique. Alors la conique Σ doit être considérée comme formée par deux points, le point P et le point de Frégier I relatif à P. Le cercle principal de cette conique est le cercle de diamètre PI; donc :

Si d'un point d'une conique on abaisse les perpendiculaires sur les côtés d'un triangle conjugué, le cercle circonscrit au triangle formé par les pieds de ces perpendiculaires coupe orthogonalement le cercle de diamètre PI, I étant le point de Frégier relatif au point P.

En particulier, les axes de la conique forment avec la droite de l'infini un triangle conjugué. Donc, si l'on joint les pieds des perpendiculaires menées d'un point d'une conique sur les axes, cette droite passe par le milieu de la distance du point à son point de Frégier. Quand le point P est quelconque dans le plan, la droite joignant ses projections sur les axes contient encore le centre radical commun de tous les cercles (C).

Dans le cas du cercle, on a la proposition suivante :

Si d'un point quelconque P du cercle conjugué à un

triangle on abaisse les perpendiculaires sur les côtés du triangle, le cercle (C) circonscrit au triangle formé par les pieds de ces perpendiculaires coupe orthogonalement le cercle de diamètre PH, H étant l'orthocentre du triangle.

Dans le cas de la parabole, le point de Frégier est, sur la normale, à la même distance de l'axe que le point P; donc la circonférence que les cercles (C) coupent orthogonalement a son centre sur l'axe.

Dans le cas de l'hyperbole équilatère, le point de Frégier est à l'infini sur la normale; donc :

Les cercles circonscrits aux triangles formés par les projections orthogonales d'un point P d'une hyperbole équilatère sur les côtés d'un triangle conjugué quelconque ont leurs centres sur la tangente en P à l'hyperbole.

Tout ce qui précède est relatif aux applications du premier des théorèmes 6. Le second théorème pourra encore s'énoncer ainsi :

7. *Les cercles principaux des coniques ayant pour foyer un point donné et conjuguées aux triangles inscrits dans une autre conique ont même centre radical.*

Ce centre radical est le centre de la conique Σ enveloppe des cordes de la conique donnée vues du point fixe sous un angle droit. Étant donné un triangle, il existe toujours une conique conjuguée à ce triangle et ayant pour foyer un point déterminé. De là le théorème suivant :

Si l'on considère un réseau de coniques ayant trois points communs, et les coniques Σ enveloppes des cordes

de chacune d'elles vues d'un même point fixe P sous un angle droit, les cercles principaux des coniques Σ coupent orthogonalement un même cercle fixe.

Ce cercle fixe est le cercle principal de la conique ayant son foyer en P et conjuguée au triangle formé par les trois points communs aux coniques du réseau.

Le théorème 7 permet de retrouver certaines propositions particulières. Ainsi, considérons une parabole conjuguée à un triangle. Soit F son foyer. Le cercle principal de cette parabole, c'est-à-dire sa tangente au sommet, coupe orthogonalement le cercle principal de la conique enveloppe des cordes du cercle circonscrit au triangle vues du point F sous un angle droit. Si O est le centre du cercle circonscrit au triangle, ce cercle principal a son centre au milieu de FO.

Donc la tangente au sommet de la parabole passe par le milieu de FO, c'est-à-dire que la directrice passe en O.

Ce théorème permet encore d'obtenir certaines relations métriques. Étant donnés un cercle O, de rayon R, et un point P à la distance d du centre, on trouve facilement que le rayon du cercle principal de la conique Σ , enveloppe des cordes de O vues du point P sous un angle droit, a pour valeur $\frac{1}{2} \sqrt{2R^2 - d^2}$.

Considérons alors les coniques d'un faisceau, elles sont toutes conjuguées au triangle diagonal du quadrangle. Soient ω le centre du cercle circonscrit à ce triangle et R son rayon, S une conique quelconque du faisceau, F un de ses foyers, O son centre. En appelant δ la distance du centre O au milieu de F ω , d la distance F ω et α le demi-axe de la conique S, on aura la relation

$$\delta^2 = \frac{2R^2 - d^2}{4} + \alpha^2.$$

En terminant cette étude déjà longue des conséquences du théorème de M. Faure, notre désir est d'avoir réussi à montrer que ce beau théorème doit être considéré comme une proposition de premier ordre dans la théorie des coniques.

NOTES.

1. Nous avons appelé théorèmes de M. Faure les deux théorèmes 1 et 2 (en prenant pour points A et B les ombilics du plan), parce que le second, qui est tout aussi important, se déduit immédiatement du premier. On pourra les distinguer l'un de l'autre en disant : premier et second théorème de Faure, ou encore : le théorème relatif aux coniques conjuguées et le théorème relatif aux coniques inscrites à un triangle.

2. Voici comment on peut établir géométriquement le premier théorème de Faure. C'est la démonstration que nous avons donnée ailleurs de la proposition générale, mais simplifiée.

LEMME I. — *L'enveloppe des droites divisant harmoniquement deux coniques est une conique.*

Ce théorème bien connu s'établit facilement dans le cas de deux cercles, et on l'étend à deux coniques par projection.

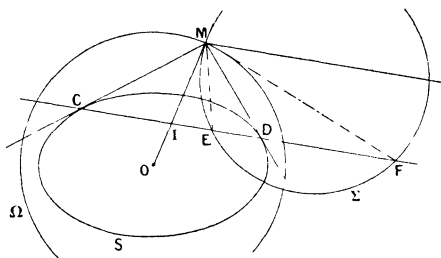
LEMME II. — *Lorsqu'un cercle (C) est circonscrit à un triangle conjugué à une conique (S), la polaire d'un point quelconque du cercle par rapport à la conique est divisée harmoniquement par les deux courbes.*

On sait que ce théorème est vrai pour une conique quelconque. En s'appuyant sur le lemme précédent, la

démonstration est très simple. En effet, les polaires de cinq points du cercle (les trois sommets du triangle conjugué et deux des points d'intersection du cercle et de la conique) par rapport à la conique sont divisées harmoniquement par les deux courbes. Donc cinq tangentes à la conique Γ enveloppe harmonique de (C) et (S) ont leurs pôles par rapport à (S) situés sur (C) ; (C) est donc la polaire réciproque de (S) par rapport à Γ . Il en résulte que la polaire d'un point quelconque de (C) par rapport à (S) étant tangente à Γ est divisée harmoniquement par (C) et (S) .

Soient maintenant M un point de rencontre du cercle orthoptique Ω d'une conique S avec un cercle Σ circonscrit à un triangle conjugué, MC , MD les tangentes menées de M à S ; elles sont rectangulaires, et la droite CD étant la polaire du point M , MO rencontre CD

Fig. 2.



en son milieu I . Soient E et F les points d'intersection de CD avec le cercle Σ . Les deux droites (ME, MF) et les droites isotropes issues de M sont conjuguées par rapport au couple (MC, MD) . Donc (théorème de Frégier généralisé) le point de rencontre de EF avec la droite de l'infini appartient à la conjuguée de la tangente en M à Σ par rapport aux rayons doubles (MC, MD) du faisceau involutif; c'est-à-dire que, si l'on mène par M

la parallèle à EF , la tangente en M au cercle Σ sera la conjuguée de cette parallèle par rapport aux droites (MC, MD) . Mais cette conjuguée est la médiane du triangle MCD issue de M , c'est-à-dire la droite MIO . Les deux cercles Σ et Ω se coupent donc orthogonalement, puisque la tangente en un point d'intersection à l'un des cercles passe par le centre de l'autre.