

ANDRÉ CAZAMIAN

**Solution géométrique de la composition de
mathématiques du concours d'admission
à l'École polytechnique en 1887**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 308-316

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__308_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION GEOMÉTRIQUE DE LA COMPOSITION DE MATHE-
MATIQUES DU CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE POLY-
TECHNIQUE EN 1887;**

PAR M. ANDRÉ GAZAMIAN.

On donne dans un plan un point fixe ω et deux axes rectangulaires fixes Ox, Oy . Par le point ω , on fait passer deux droites rectangulaires rencontrant Ox en B et D , Oy en A et C . Par les points A, B , on fait passer une parabole P tangente aux axes Ox et Oy en ces points; par les points C et D on fait passer une parabole P' tangente aux axes Ox, Oy en ces points. On fait tourner les droites rectangulaires AB, CD autour du point ω et l'on demande :

1^o Les équations des paraboles P, P' de leurs axes et de leurs directrices;

2^o L'équation du lieu du point de concours des axes et des directrices;

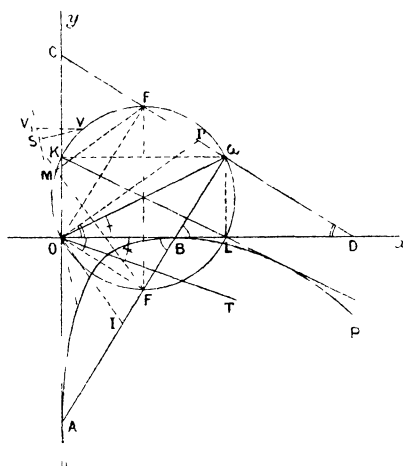
3^o L'équation du lieu du point de concours de leurs axes, qui se compose de deux cercles.

4° On prouvera que la distance des foyers est constante.

1° Le point O est un point de la directrice de chacune des paraboles P et P' , puisque les tangentes issues de O à chacune d'elles sont rectangulaires. Le foyer F de la parabole P est la projection du point O de la directrice sur sa polaire AB ; de même le foyer F' de P' est la projection de O sur CD . Il en résulte que, lorsque le système des deux droites ωAB , ωCD tourne autour de ω , les foyers des paraboles P et P' décrivent le cercle (C) ayant pour diamètre $O\omega$. Ce cercle passe par les projections K , L du point ω sur les axes. Le quadrilatère $\omega FOF'$ étant un rectangle, on a

$$FF' = O\omega,$$

Fig. 1.



ce qui montre que la distance des foyers reste constante et égale à la distance du point O au point fixe ω (quatrième partie du problème).

2° Soient I le milieu de AB et I' le milieu de CD. La droite OI est parallèle à l'axe de la parabole P; de même la droite OI' est parallèle à l'axe de P'. Les axes de ces deux paraboles sont donc les droites FM et F'M, parallèles menées respectivement à OI et OI' par les foyers F et F'. Je dis que l'angle FMF' est droit.

En effet, cet angle est égal à $\widehat{IOI'}$ comme ayant les côtés parallèles, et 'on a

$$\widehat{IOI'} = \widehat{IOD} + \widehat{I'OD} = \widehat{OBI} + \widehat{I'DO} = \widehat{\omega BD} + \widehat{\omega DB} = 1 \text{ droit.}$$

L'angle FMF' étant droit, le point M appartient au cercle de diamètre FF', lequel n'est autre que le cercle fixe (C) de diamètre O ω . Le lieu du point de concours des axes est donc le même que le lieu des foyers : c'est le cercle de diamètre O ω (l'énoncé indique par erreur que le lieu est formé de deux cercles).

3° Cherchons le lieu du point de rencontre de chacune des paraboles P et de chacune des paraboles P' avec sa directrice. Les directrices passent par le point fixe O et elles sont perpendiculaires sur les axes : donc le lieu en question n'est autre que la podaire de l'enveloppe des axes des paraboles P par rapport au point O. Il est clair que l'enveloppe des axes des paraboles P' est la même que celle des axes des paraboles P, car, si l'on considère ces paraboles P' isolément, rien ne les différencie des premières. Le problème est donc le suivant :

On considère les paraboles tangentes à deux droites rectangulaires Oy, Ox, en deux points variables, mais tels que la corde des contacts passe par un point fixe ω . Enveloppe des axes de ces paraboles.

Nous avons vu que le lieu des foyers des paraboles

considérées était le cercle (C) de diamètre $O\omega$. Soient K, L les points d'intersection de ce cercle et des axes Ox , Oy .

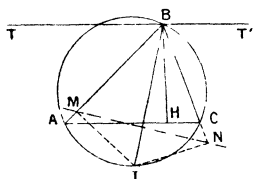
La parabole P a son foyer situé sur le cercle circonscrit au triangle fixe OKL et elle est tangente à deux côtés de ce triangle : donc elle est aussi tangente au troisième côté KL. On voit ainsi que *les paraboles P et P' sont inscrites dans un triangle fixe, le triangle OKL*. La question est ainsi ramenée à un problème connu : Déterminer l'enveloppe des axes des paraboles inscrites dans un triangle.

C'est l'enveloppe des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque du cercle circonscrit à un triangle sur la droite de Simson qui lui correspond. Or il est facile de démontrer (voir par exemple WEILL, *Journal de Mathématiques spéciales*, 1884) que ces perpendiculaires sont les droites de Simson du triangle formé par les parallèles menées de chaque sommet au côté opposé. L'enveloppe des axes des paraboles inscrites dans le premier triangle (ou conjuguées au second triangle) est donc l'enveloppe des droites de Simson de ce second triangle, c'est-à-dire, comme on le sait, une hypocycloïde à trois rebroussements admettant comme cercle inscrit le cercle des neuf points du nouveau triangle, qui est le cercle circonscrit au premier.

L'enveloppe des axes des paraboles P et P' est ainsi déterminée. C'est une hypocycloïde à trois rebroussements dont le cercle inscrit à la courbe est le cercle (C) de diamètre $O\omega$. La construction des tangentes menées de O à l'hypocycloïde H nous sera d'une grande utilité pour déterminer la podaire de la courbe par rapport au point O. Puisque le point O se trouve sur le cercle inscrit à H, deux des tangentes issues de O sont rectangulaires. D'ailleurs, d'une manière générale, l'hypo-

cycloïde enveloppe des axes des paraboles inscrites dans un triangle ABC est tangente aux six bissectrices des angles du triangle ainsi qu'aux parallèles menées par chacun des sommets au côté opposé. Soit, en effet, la

Fig. 2.



bissectrice BI rencontrant le cercle circonscrit en I. La parabole inscrite qui a pour foyer le point I a pour tangente au sommet la droite de Simson du point I; or cette droite de Simson MN est perpendiculaire sur BI. Donc BI est l'axe de la parabole. Il en est de même de la seconde bissectrice de l'angle B. D'autre part, la parabole inscrite qui a pour foyer le sommet B a pour tangente au sommet la droite de Simson de B, c'est-à-dire la hauteur BH. Cette parabole est formée par la droite double TT' parallèle avec AC. Son axe est confondu avec TT'.

Il résulte de ces considérations que les tangentes issues de O à l'hypocycloïde enveloppe des axes des paraboles P et P' sont les deux bissectrices de l'angle $\alpha O \gamma$, et la parallèle menée de O à KL, c'est-à-dire la droite OT symétrique de $O\omega$ par rapport à Ox. Ces tangentes auraient d'ailleurs pu être déterminées directement : ce sont les axes de trois paraboles particulières du système. En définitive :

L'enveloppe des axes des paraboles P et P' est une hypocycloïde à trois rebroussements, circonscrite au cercle de diamètre $O\omega$, tangente aux six bissectrices

du triangle formé par le point O et les projections du point ω sur les axes, ainsi qu'aux parallèles menées aux axes par le point ω et à la droite symétrique de $O\omega$ par rapport à Ox .

Nous pouvons maintenant revenir à la recherche du lieu des points de rencontre de l'axe et de la directrice des paraboles P. Cette courbe L sera ainsi une podaire d'hypocycloïde à trois rebroussements par rapport à un point du cercle inscrit dans la courbe. Or, d'une manière générale :

Les podaires de l'hypocycloïde à trois rebroussements sont des quartiques unicursales admettant comme directions asymptotiques doubles les droites isotropes.

En effet, l'hypocycloïde à trois rebroussements est une courbe de troisième classe bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques. Cherchons la podaire de cette courbe par rapport à un point quelconque P. Cette podaire a un point triple en P, puisqu'on peut mener de P trois tangentes à l'hypocycloïde. Mais sur une droite quelconque PM passant par P se trouve un seul point du lieu puisque, l'hypocycloïde ayant pour tangente double la droite de l'infini, dont la direction est indéterminée, on ne peut lui mener qu'une seule tangente perpendiculaire à une direction donnée PM. Donc la podaire est une quartique admettant un point triple en P. On voit de plus que cette podaire est, comme l'hypocycloïde elle-même, tangente à la droite de l'infini en chacun des points cycliques; donc :

La courbe L est une quartique admettant au point O un point triple réel et ayant pour directions asymptotiques doubles les droites isotropes.

Nous avons déterminé les tangentes à l'hypocycloïde issues de O : ce sont les deux bissectrices de l'angle xOy et la droite OT. Or il est bien facile de voir que les tangentes à la podaire d'une courbe par rapport à un point P, en ce point, sont perpendiculaires sur les tangentes à la courbe qui passent par le point. Donc :

Les tangentes à la courbe L en son point triple O sont les deux bissectrices de l'angle xOy et la perpendiculaire en O sur la droite OT symétrique de Oω par rapport à Ox.

Les résultats auxquels nous sommes parvenu nous permettent d'écrire immédiatement, sans aucun calcul, l'équation de la quartique L :

$$(x^2 + y^2)^2 + (y - x)(y + x)(qy - px) = 0,$$

en appelant p et q les coordonnées du point ω ; mais il est bien inutile d'étudier cette équation pour avoir la forme de la quartique L. Celle-ci peut, en effet, être construite géométriquement point par point de la façon suivante. On prendra un point quelconque V sur le cercle (C) : ce sera le foyer de l'une des paraboles P ou P' ; on joindra le point O au symétrique V₁ de V par rapport à l'un des axes Ox ou Oy ; la droite OV₁ sera la directrice de la parabole correspondante, l'axe sera la perpendiculaire VS : donc le point S sera un point du lieu. On voit ainsi que la quartique passe par les projections du point ω sur les axes, et l'on se rend immédiatement compte de sa forme : c'est un trifolium.

Puisque les axes des paraboles P et P' ont même enveloppe, il est clair que la quartique L est aussi le lieu des points de rencontre de l'axe et de la directrice des paraboles P'.

4° Cherchons enfin le lieu du point de rencontre de

l'axe de chaque parabole P avec la directrice de la parabole P' correspondante. L'axe de la parabole P est la droite FM , celui de la parabole P' est la droite $F'M$, parallèle à OI' ; donc la droite OI est perpendiculaire sur $F'M$ et, par suite, est la directrice de la parabole P' ; de même la droite OI' est la directrice de la parabole P .

Ainsi donc, l'axe d'une parabole P est constamment parallèle à la directrice de la parabole P' correspondante et réciproquement. Mais, dans certains cas particuliers, l'axe de l'une des paraboles peut coïncider avec la directrice de l'autre, de sorte que cet axe peut alors être considéré comme faisant partie du lieu. C'est ce qui se produit pour la parabole P formée par la droite double OT : son axe est OT et OT est la directrice de la parabole P' correspondante.

Remarques sur les podaires de l'hypocycloïde à trois rebroussements. — Les podaires de l'hypocycloïde à trois rebroussements sont des quartiques ayant un point triple et, par conséquent, unicursales. Elles ont en outre, comme directions asymptotiques doubles, les droites isotropes. Lorsque le point est intérieur à la courbe, elles affectent la forme d'un trifolium. On les rencontre dans un certain nombre de questions, parmi lesquelles nous signalerons :

1° Le lieu des points de rencontre des axes et des directrices des paraboles inscrites ou conjuguées à un triangle;

2° Le lieu des projections du sommet O de l'angle droit d'un triangle rectangle isocèle sur les axes des paraboles inscrites dans le triangle (École Polytechnique, concours de 1869). Le point O étant alors l'un des points de contact de l'hypocycloïde avec son cercle inscrit, la podaire a une tangente de rebroussement

au point O, l'autre tangente étant perpendiculaire sur la première. La courbe n'a plus alors que deux boucles, elle a une forme remarquable et on la construit points par points d'une façon très simple ;

3° Le lieu des projections du milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isoscèle sur les axes des paraboles circonscrites (Ecole Navale, concours de 1893).