

ANDRÉ CAZAMIAN

Sur quelques propriétés de la parabole et de ses inverses

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 281-283

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__281_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA PARABOLE ET DE SES INVERSES;

PAR M. ANDRÉ CAZAMIAN.

L'équation d'une parabole étant

$$y^2 - 2px = 0.$$

en posant $x = ty$, on a

$$y = 2pt, \quad x = 2pt^2.$$

On voit immédiatement qu'en remplaçant x et y par ces valeurs dans l'équation d'un cercle quelconque du plan, l'équation en t ne contiendra pas de terme du troisième degré; en d'autres termes, on aura entre les paramètres des points d'intersection d'un cercle quelconque et de la parabole la relation

$$(1) \quad t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0.$$

Si l'on coupe une parabole par un cercle quelconque, la somme algébrique des cotangentes des angles que font avec l'axe les droites joignant le sommet aux points d'intersection est nulle.

La relation fondamentale (1) permet d'énoncer entre autres le théorème suivant :

Les cercles osculateurs à une parabole en quatre points situés sur un cercle rencontrent de nouveau la parabole en quatre points situés sur un cercle.

En transformant par inversion, le centre d'inversion étant sur la parabole, on obtient un théorème analogue sur la cissoïde oblique (Balitrand). Si le centre d'inver-

sion est en l'un des points d'intersection du cercle avec la parabole, on obtient un théorème relatif aux cercles osculateurs à la cissoïde en trois points en ligne droite.

Les cercles osculateurs en trois points de la cissoïde en ligne droite la coupent en trois nouveaux points; le cercle circonscrit au triangle formé par ces trois points passe par un point fixe qui est le point où la cissoïde est rencontrée par son asymptote (1).

(1) Et non le point où la cissoïde est surosculée par un cercle (qui correspond au sommet de la parabole inverse), comme l'indique M. Balitrand (*Nouv. Ann.*, novembre 1893, p. 450).

D'ailleurs, notre énoncé peut se vérifier par le calcul. L'équation de la cissoïde étant

$$(y - cx)(x' + y^2) - ay^2 = 0,$$

en posant $x = ty$, on trouve que les paramètres t_1, t_2, t_3 de trois points en ligne droite vérifient la relation $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{c}$ (*loc. cit.*, p. 448), et les paramètres de quatre points sur un cercle $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{2}{c}$. Considérons les cercles osculateurs en trois points (t_1, t_2, t_3) en ligne droite, ils rencontrent la cissoïde en trois nouveaux points $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, et l'on aura

$$3t_1 + \theta_1 = \frac{2}{c},$$

$$3t_2 + \theta_2 = \frac{2}{c},$$

$$3t_3 + \theta_3 = \frac{2}{c}.$$

Ajoutant membre à membre :

$$3(t_1 + t_2 + t_3) + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{6}{c},$$

ou

$$3 \times \frac{1}{c} + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{6}{c},$$

donc

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{3}{c}.$$

Le cercle ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) rencontre la cissoïde en un quatrième point θ_4 .

Si le centre d'inversion est quelconque dans le plan :

Les cercles osculateurs à une cyclique cuspidale (en particulier à une cardioïde) en quatre points situés sur un cercle rencontrent de nouveau la cyclique en quatre points situés sur un même cercle.