

V. HIOUX

Sur les quadriques autopolaires

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 211-215

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__211_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES QUADRIQUES AUTOPOLAIRES;

PAR M. V. HIOUX.

On peut comme il suit étendre aux quadriques certains des résultats de M. Appell.

THÉOREME. — *Si l'on désigne par P, Q, R et S quatre fonctions indépendantes, entières et du premier degré des coordonnées cartésiennes x, y, z , et si deux quadriques (Σ) et (Σ_1) sont représentées par les équations*

$$(\Sigma) \quad PQ + RS = 0,$$

$$(\Sigma_1) \quad PQ - RS = 0,$$

chacune d'elles est autopolaire par rapport à l'autre.

En effet, le plan polaire d'un point $M(P', Q', R', S')$ par rapport à Σ a pour équation

$$PQ' + QP' + RS' + SR' = 0.$$

Si ce point M est pris sur Σ_1 , on a la relation

$$P'Q' - R'S' = 0$$

Pour avoir l'enveloppe des plans, il faut, en outre, tenir compte des relations

$$\frac{P}{P'} = \frac{Q}{Q'} = -\frac{S}{R'} = -\frac{R}{S'}.$$

L'équation de l'enveloppe est, par suite,

$$PQ - RS = 0,$$

c'est-à-dire que l'enveloppe est Σ_1 .

Exemple :

$$(\Sigma) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$(\Sigma_1) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Si l'on pose $m^2 = \frac{a^2}{b^2}$ et $n^2 = \frac{a^2}{c^2}$, les équations peuvent s'écrire

$$(x - a)(x + a) + (my - nz)(my + nz) = 0,$$

$$(x - a)(x + a) - (my - nz)(my + nz) = 0.$$

Ces deux hyperboloïdes répondent à la question.

Remarque. — Représentons la quadrique Σ par l'équation

$$(\Sigma) \quad lz^2 + 2kxy - t^2 = 0$$

avec

$$t = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1.$$

Par le point de contact B de Oy avec la quadrique, par exemple, menons une sécante arbitraire qui rencontre (Σ) en un second point C et le plan zOx en D. Soit M le conjugué harmonique de C par rapport aux points B et D. Si la sécante tourne autour de B, le point M décrit la quadrique (Σ_1) ayant pour équation

$$lz^2 - 2kxy - t^2 = 0.$$

En effet, menons un plan $y = \mu x$ qui coupe (Σ) suivant une conique (c) . Un cône de sommet B et de base (c) a pour équation

$$lz^2 + 2k\mu x^2 - t^2 = 0.$$

Le plan $y = -\mu x$, conjugué du précédent par rapport à zOy et zOx , coupe ce cône suivant une co-

nique (M). Sur toute génératrice partant de B, à un point C de (c) correspond le point demandé M de (M).

En éliminant μ entre l'équation du cône et $y = -\mu x$, on obtient le lieu des coniques (M) et l'on voit que, si l'on élimine μ entre la même équation et celle du plan $y = \mu x$, on obtient le lieu des coniques (C) ou la surface (Σ). L'autre surface associée est Σ_1 , dont l'équation est

$$z^2 - 2kxy - t^2 = 0.$$

Les équations de (Σ) et de (Σ_1) sont, comme on le voit, de la forme

$$PQ + RS = 0 \quad \text{et} \quad PQ - RS = 0.$$

Le procédé pour obtenir l'une des quadriques, l'autre étant donnée, se trouve indiqué suffisamment.

Nota. — Considérons deux quadriques (Σ) et (Σ') rapportées à leur tétraèdre conjugué commun; leurs équations peuvent s'écrire

$$(\Sigma) \quad \alpha X^2 + b Y^2 + c Z^2 + d T^2 = 0,$$

$$(\Sigma') \quad \alpha' X^2 + b' Y^2 + c' Z^2 + d' T^2 = 0.$$

Si l'on cherche la polaire réciproque de (Σ') par rapport à (Σ), on obtient une surface (Σ'') représentée par l'équation

$$\frac{\alpha^2}{\alpha'} X^2 + \frac{b^2}{b'} Y^2 + \frac{c^2}{c'} Z^2 + \frac{d^2}{d'} T^2 = 0.$$

Exprimons maintenant que (Σ'') et (Σ') coïncident, nous avons les relations

$$\frac{\alpha'^2}{\alpha^2} = \frac{b'^2}{b^2} = \frac{c'^2}{c^2} = \frac{d'^2}{d^2}.$$

On voit que l'on est ramené à une simple question de signes, car on peut désigner par $k^2 = 1$ la valeur

commune de tous ces rapports. On aura

$$a' = \pm a, \quad b' = \pm b, \quad c' = \pm c, \quad d' = \pm d.$$

1° Dans l'équation de (Σ) , changeons le signe d'un seul carré, du dernier, par exemple, nous aurons une autre quadrique

$$(\Sigma_1) \quad aX^2 + bY^2 + cZ^2 - dT^2 = 0,$$

qui sera sa polaire réciproque par rapport à (Σ) .

2° Changeons dans l'équation de (Σ) les signes des deux derniers carrés, par exemple, nous aurons une quadrique (Σ_2) , savoir :

$$(\Sigma_2) \quad aX^2 + bY^2 - cZ^2 - dT^2 = 0,$$

jouissant de la même propriété que (Σ_1) .

Il est inutile de changer les signes de trois carrés, car on retomberait dans le premier cas.

D'ailleurs, en changeant les signes des quatre carrés, on retrouverait la quadrique (Σ) .

On constate que deux quadriques (Σ) et (Σ_1) de la première catégorie sont inscrites dans un même cône suivant la même courbe; elles sont circonscrites l'une à l'autre.

Si, au contraire, on considère deux quadriques associées (Σ) et (Σ_2) de la seconde catégorie, leurs équations sont de la forme

$$PQ + RS = 0, \quad PQ - RS = 0.$$

Elles ont comme génératrices communes les quatre côtés d'un quadrilatère gauche.

Supposons que l'on se donne

$$(\Sigma) \quad \left(\frac{P-Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{R+S}{2}\right)^2 - \left(\frac{R-S}{2}\right)^2 = 0.$$

Pour avoir (Σ_1) , changeons les signes des deux der-

(215̃)

niers carrés, nous trouvons

$$(\Sigma_1) \left(\frac{P+Q}{2} \right)^2 - \left(\frac{P-Q}{2} \right)^2 - \left(\frac{R+S}{2} \right)^2 + \left(\frac{R-S}{2} \right)^2 = 0.$$

Ainsi à $PQ + RS = 0$ correspond $PQ - RS = 0$.