

MAURICE D'OCAGNE

Calcul d'une intégrale définie

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 198-202

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__198_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CALCUL D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

1. L'intégrale que j'ai ici en vue est définie de la manière suivante :

Posant

$$\varphi(u_1, u_2) = a_1 u_1^2 + 2b u_1 u_2 + a_2 u_2^2 + 3c_1 u_1 + 2c_2 u_2 + d,$$

on considère tous les éléments infiniment petits du second ordre de la forme

$$e^{-\varphi(u_1, u_2)} du_1 du_2,$$

répondant à tous les systèmes de valeurs de u_1 et u_2 tels que l'on ait

$$u_1 + u_2 = t,$$

et on en fait la somme.

Cette somme, qui peut s'écrire

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varphi(u_1, u_2)} du_1 du_2 \quad (\text{pour } u_1 + u_2 = t),$$

est elle-même un infiniment petit du premier ordre évidemment de la forme

$$I = f(t) dt.$$

Le problème qu'il s'agit de résoudre consiste à déterminer la fonction $f(t)$.

Ce problème est d'une importance capitale dans certaines questions de Calcul des probabilités, comme je le fais voir dans un travail qui paraîtra prochainement. Mais il présente, je pense, un intérêt suffisant comme exercice de Calcul intégral pour être traité à part ici.

2. Prenons les variables u_1 et u_2 pour des coordonnées courantes x et y et considérons la surface S dont l'équation est

$$z = e^{-\varphi(u_1, u_2)}.$$

L'intégrale I , qui vient d'être définie, n'est autre que le volume de la tranche infiniment mince comprise entre cette surface, le plan des $u_1 u_2$ et les deux plans parallèles à l'axe des z

$$u_1 + u_2 = t$$

et

$$u_1 + u_2 - t = dt,$$

que nous désignerons par P_t et P_{t+dt} .

Soit σ l'aire comprise, sur le plan P_t , entre la trace de ce plan sur celui des $u_1 u_2$ et son intersection avec la surface S . On a, en remarquant que l'écartement normal des plans P_t et P_{t+dt} est égal à $\frac{dt}{\sqrt{2}}$,

$$(1) \quad I = \frac{\sigma dt}{\sqrt{2}}.$$

Tout revient donc à calculer σ .

Pour cela, transportons l'origine au point O' où la bissectrice de l'angle $u_1 O u_2$ coupe le plan P_t , l'axe des z conservant sa direction et l'axe des u'_1 se confondant avec la trace de P_t sur le plan $u_1 O u_2$.

L'équation de la surface S devient alors

$$z = e^{-\varphi \left[\frac{(u'_1 + u'_2)\sqrt{2} + t}{2}, \frac{(-u'_1 + u'_2)\sqrt{2} + t}{2} \right]},$$

et sa courbe d'intersection par le plan P_t , devenu le plan des $u'_1 z$, a pour équation ($u'_2 = 0$)

$$z = e^{-\varphi \left(\frac{u'_1 \sqrt{2} + t}{2}, \frac{-u'_1 \sqrt{2} + t}{2} \right)}.$$

Donc, en appelant $\psi(u'_1)$ la fonction de u'_1 qui figure dans l'exposant

$$(2) \quad \sigma = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\psi(u'_1)} du'_1.$$

Telle est l'intégrale définie au calcul de laquelle nous sommes ramenés.

L'expression développée de $\psi(u'_1)$ est la suivante

$$\begin{aligned} \psi(u'_1) = & a_1 \frac{(u'_1 \sqrt{2} + t)^2}{4} + 2b \frac{t^2 - 2u'^2_1}{4} + a_2 \frac{(-u'_1 \sqrt{2} + t)^2}{4} \\ & + 2c_1 \frac{u'_1 \sqrt{2} + t}{2} + 2c_2 \frac{-u'_1 \sqrt{2} + t}{2} + d, \end{aligned}$$

ou

$$(3) \quad \psi(u'_1) = lu'^2_1 + 2mu'_1 + n,$$

avec

$$(4) \quad \begin{cases} l = \frac{a_1 - 2b + a_2}{2}, \\ m = \frac{(a_1 - a_2)t + 2(c_1 - c_2)}{2\sqrt{2}}, \\ n = \frac{(a_1 + 2b + a_2)t^2 + 4(c_1 + c_2)t + 4d}{4}. \end{cases}$$

Remarquons que la formule (3) peut s'écrire

$$\psi(u'_1) = \left(\sqrt{l}u'_1 + \frac{m}{\sqrt{l}} \right)^2 + \frac{nl - m^2}{l}.$$

La formule (2) devient donc, si l'on fait sortir la partie constante du signe $\int$,

$$\sigma = e^{-\frac{nl - m^2}{l}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{l}u'_1 + \frac{m}{\sqrt{l}} \right)^2} du'_1,$$

ou, en posant $\sqrt{l}u'_1 + \frac{m}{\sqrt{l}} = v$,

$$\sigma = e^{-\frac{nl - m^2}{l}} \frac{1}{\sqrt{l}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv.$$

Or, on sait que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}.$$

Par suite,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{l}} e^{-\frac{nl-m^2}{l}},$$

et la formule (1) donne

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{2l}} e^{-\frac{nl-m^2}{l}} dt.$$

Il suffit, pour que le problème soit achevé, de remplacer, dans cette expression, l , m et n par leurs valeurs (4), ce qui n'offre aucune difficulté. On trouve ainsi finalement

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{\pi}{a_1 - 2b + a_2}} \\ &\times e^{-\frac{l^2(a_1 a_2 - b^2) + 2l[a_1 c_2 + a_2 c_1 - b(c_1 + c_2)] + d(a_1 - 2b + a_2) - (c_1 - c_2)^2}{a_1 - 2b + a_2}} dt. \end{aligned} \right.$$