

WORONTZOFF

Sur le développement en séries des fonctions implicites

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 167-184

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__167_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES FONCTIONS
IMPLICITES;**

PAR M. WORONTZOFF.

1. Soient

$$f_0(\mathcal{Y}), \quad f_1(\mathcal{Y}), \quad f_2(\mathcal{Y}), \quad \dots \quad f_m(\mathcal{Y})$$

des fonctions algébriques ou transcendentes bien déterminées, r une racine simple de l'équation $f_0(\gamma) = 0$ et

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma &= a + a_1 x + \frac{a_2}{1.2} x^2 + \frac{a_3}{1.2.3} x^3 + \dots \\ &\quad - \frac{a_n}{1.2.3 \dots n} x^n + R = a + X \end{aligned} \right.$$

une racine commune des équations

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} f_0(\gamma) + x f_1(\gamma) + x^2 f_2(\gamma) \\ + x^3 f_3(\gamma) + \dots + x^m f_m(\gamma) = 0 \end{aligned} \right.$$

et

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma - r + x F_1(\gamma) + x^2 F_2(\gamma) \\ + x^3 F_3(\gamma) + \dots + x^m F_m(\gamma) = 0, \end{aligned} \right.$$

où

$$\begin{aligned} F_1(\gamma) &= \frac{f_1(\gamma)}{\Phi(\gamma)}, & F_2(\gamma) &= \frac{f_2(\gamma)}{\Phi(\gamma)}, \\ F_3(\gamma) &= \frac{f_3(\gamma)}{\Phi(\gamma)}, & \dots, & & F_m(\gamma) &= \frac{f_m(\gamma)}{\Phi(\gamma)}, \\ \Phi(\gamma) &= \frac{f_0(\gamma)}{\gamma - r}, & \Phi(r) &= f_0(r), & \Phi^n(r) &= \frac{f_0^{(n+1)}(r)}{n+1}. \end{aligned}$$

Nous nous proposons ici de déterminer les coefficients

$$a, \quad \frac{a_1}{1!}, \quad \frac{a_2}{2!}, \quad \dots, \quad \frac{a_n}{n!},$$

dans la série (1).

2. Si $F(u)$, $F'(u)$, $\dots$, $F^{(n+1)}(u)$, pour les valeurs de u comprises entre $u_0 = f(\xi)$ et $u = f(\xi + z)$, et $f(t)$, $f'(t)$, $\dots$, $f^{(n+1)}(t)$, pour les valeurs de t comprises entre $t_0 = \xi$ et $t = \xi + z$, sont des fonctions finies et continues, on a

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &F[f(\xi + z)] \\ &= \left\{ F(u_0) + \frac{(u - u_0)}{1} F'(u_0) + \dots \right. \\ &\quad + \frac{(u - u_0)^n}{1.2 \dots n} F^{(n)}(u_0) \\ &\quad \left. + \frac{(u - u_0)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} F^{(n+1)}[u_0 + \theta(u - u_0)] \right\}_{u=f(\xi+z), u_0=f(\xi)}. \end{aligned} \right.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & f(\xi + z) \\ &= f(\xi) + z f'(\xi) + z^2 \frac{f''(\xi)}{2!} + \dots \\ &\quad + z^n \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} + z^{n+1} f^{(n+1)} \frac{(\xi + \theta_1 z)}{(n+1)!} \\ &= C + C_1 z + \frac{C_2}{2!} z^2 + \frac{C_3}{3!} z^3 + \dots \\ &\quad + \frac{C_n}{n!} z^n + z^{n+1} f^{(n+1)} \frac{(\xi + \theta_1 z)}{(n+1)!}, \end{aligned} \right.$$

où

$$C = f(\xi), \quad C_n = f^{(n)}(\xi).$$

En remplaçant, dans le second membre de l'égalité (4), $f(\xi + z)$ par la série (5), on obtient

$$F[f(\xi + z)] = F[f(\xi)] + q_1 z + q_2 z^2 + q_3 z^3 + \dots + q_n z^n - \dots$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{\{ D_z^n F[f(\xi + z)] \}_{z=0}}{1.2 \dots n} \\ &= q_n = \sum \frac{F^{(i)}(c)}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} \left(\frac{c_1}{1!} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{c_2}{2!} \right)^{\alpha_2} \left(\frac{c_3}{3!} \right)^{\alpha_3} \dots \left(\frac{c_n}{n!} \right)^{\alpha_n}, \end{aligned}$$

le signe sommatoire s'étendant à toutes les solutions entières positives des équations

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + n\alpha_n = n,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Mais

$$D_z^n F[f(\xi + z)] = D_\xi^n F[f(\xi + z)],$$

$$\{ D_z^n F[f(\xi + z)] \}_{z=0} = \{ D_\xi^n F[f(\xi + z)] \}_{z=0} = D_\xi^n F[f(\xi)];$$

par conséquent

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & D_\xi^n F[f(\xi)] \\ &= n! \sum \frac{F^{(i)}[f(\xi)]}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3! \dots \alpha_n!} \\ &\quad \times \left[\frac{f'(\xi)}{1!} \right]^{\alpha_1} \left[\frac{f''(\xi)}{2!} \right]^{\alpha_2} \left[\frac{f'''(\xi)}{3!} \right]^{\alpha_3} \dots \left[\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \right]^{\alpha_n} \\ &= n! \sum \frac{F^{(i)}(c)}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3! \dots \alpha_n!} \\ &\quad \times \left(\frac{c_1}{1!} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{c_2}{2!} \right)^{\alpha_2} \left(\frac{c_3}{3!} \right)^{\alpha_3} \dots \left(\frac{c_n}{n!} \right)^{\alpha_n} = D_\xi^n F(c), \end{aligned} \right.$$

où

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = n,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = i = 1, 2, 3, \dots, n$$

(J. BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 308).

3. Maintenant substituons $a + X$ au lieu de y , dans les équations (2) et (3), et supposons que les fonctions $f_0(a + X)$, $f_1(a + X)$, $f_2(a + X)$, $\dots$, $f_m(a + X)$, $F_1(a + X)$, $F_2(a + X)$, $\dots$, $F_m(a + X)$ soient développables suivant les puissances croissantes de X ; on obtient alors, au moyen de la formule de Taylor,

$$\begin{aligned}
 & f_0(a) + Xf'_0(a) + \frac{X^2}{2!} f''_0(a) + \dots + \frac{X^n}{n!} f^{(n)}_0(a) + R_1 \\
 & + x \left[f_1(a) + Xf'_1(a) + \frac{X^2}{2!} f''_1(a) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}_1(a) + R_2 \right] \\
 & + x^2 \left[f_2(a) + Xf'_2(a) + \frac{X^2}{2!} f''_2(a) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{X^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n-2)}_2(a) + R_3 \right] \\
 & \dots\dots\dots \\
 & + x^{m-2} \left[f_{m-2}(a) + Xf'_{m-2}(a) + \frac{X^2}{2!} f''_{m-2}(a) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{X^{n-m+2}}{(n-m+2)!} f^{(n-m+2)}_{m-2}(a) + R_{m-1} \right] \\
 & + x^{m-1} \left[f_{m-1}(a) + Xf'_{m-1}(a) + \frac{X^2}{2!} f''_{m-1}(a) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{X^{n-m+1}}{(n-m+1)!} f^{(n-m+1)}_{m-1}(a) + R_m \right] \\
 & + x^m \left[f_m(a) + Xf'_m(a) + \frac{X^2}{2!} f''_m(a) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{X^{n-m}}{(n-m)!} f^{(n-m)}_m(a) + R_{m+1} \right] = o(n > m)
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

et

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & a - r + X + x \left[F_1(a) + X F'_1(a) + \frac{X^2}{2!} F''_1(a) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}_1(a) + R'_1 \right] \\
 & + x^2 \left[F_2(a) + X F'_2(a) + \frac{X^2}{2!} F''_2(a) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{X^{n-2}}{(n-2)!} F^{(n-2)}_2(a) + R'_2 \right] \\
 & \dots\dots\dots \\
 & + x^{m-2} \left[F_{m-2}(a) + X F'_{m-2}(a) \right. \\
 & \quad + \frac{X^2}{2!} F''_{m-2}(a) + \dots \\
 & \quad \left. + \frac{X^{n-m+2}}{(n-m+2)!} F^{(n-m+2)}_{m-2}(a) + R'_{m-2} \right] \\
 & + x^{m-1} \left[F_{m-1}(a) + X F'_{m-1}(a) \right. \\
 & \quad + \frac{X^2}{2!} F''_{m-1}(a) + \dots \\
 & \quad \left. + \frac{X^{n-m+1}}{(n-m+1)!} F^{(n-m+1)}_{m-1}(a) + R'_{m-1} \right] \\
 & + x^m \left[F_m(a) + X F'_m(a) + \frac{X^2}{2!} F''_m(a) + \dots \right. \\
 & \quad \left. + \frac{X^{n-m}}{(n-m)!} F^{(n-m)}_m(a) + R'_m \right] = 0 \quad (n > m),
 \end{aligned}$$

où

$$X = a_1 x + \frac{a_2}{2!} x^2 + \frac{a_3}{3!} x^3 + \dots + \frac{a_n}{n!} x^n + R.$$

De l'identité (7), en y égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x , on déduit

$$\begin{aligned}
 & f_0(a) = 0, \\
 & a_1 f'_0(a) + f_1(a) = 0, \\
 & \frac{a_2}{1.2} f'_0(a) + \frac{a_1^2}{1.2} f''_0(a) + a_1 f'_1(a) + f_2(a) = 0, \\
 & -\frac{a_3}{1.2.3} f'_0(a) + \frac{a_1 a_2}{1.2} f''_0(a) + \frac{a_1^3}{1.2.3} f'''_0(a) \\
 & + \frac{a_2}{1.2} f'_1(a) + \frac{a_1^2}{1.2} f''_1(a) + a_1 f'_2(a) + f_3(a) = 0, \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

en considérant a comme fonction d'une variable fictive ξ , dont les dérivées successives seraient $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ et en ayant égard à la formule (6), on a généralement

$$(9) \left\{ \begin{aligned} & D_{\xi}^p \frac{f_0(a)}{p!} + D_{\xi}^{p-1} \frac{f_1(a)}{(p-1)!} + D_{\xi}^{p-2} \frac{f_2(a)}{(p-2)!} + \dots \\ & \quad + D_{\xi}^2 \frac{f_{p-2}(a)}{2!} + D_{\xi} f_{p-1}(a) + f_p(a) = 0, \\ & \dots\dots\dots \\ & D_{\xi}^n \frac{f_0(a)}{n!} + D_{\xi}^{n-1} \frac{f_1(a)}{(n-1)!} + \dots \\ & \quad + D_{\xi}^{n-m+1} \frac{f_{m-1}(a)}{(n-m+1)!} + D_{\xi}^{n-m} \frac{f_m(a)}{(n-m)!} = 0, \end{aligned} \right.$$

où

$$p \leq m, \quad n \geq m$$

et

$$D_{\xi}^k \frac{f_h}{k!}(a) = \sum \frac{f_h^{(i)}(a)}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{a_2}{2!}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{a_k}{k!}\right)^{\alpha_k},$$

le signe sommatoire s'étendant à toutes les solutions entières positives des équations

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k = k,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = i = 1, 2, 3, \dots, k.$$

L'identité (8) donne

$$\begin{aligned}
 & a - r = 0, \\
 & a_1 - F_1(a) = 0, \\
 & \frac{a_2}{1.2} + a_1 F'_1(a) + F_2(a) = 0, \\
 & \frac{a_3}{1.2.3} + \frac{a_2}{1.2} F'_1(a) + \frac{a_1^2}{1.2} F''_1(a) + a_1 F'_2(a) + F_3(a) = 0, \\
 & \dots, \\
 (10) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \frac{a_p}{p!} + D_\xi^{p-1} \frac{F_1(a)}{(p-1)!} + D_\xi^{p-2} \frac{F_2(a)}{(p-2)!} + \dots \\ & + D_\xi^2 \frac{F_{p-2}(a)}{2!} + D_\xi F_{p-1}(a) + F_p(a) = 0, \\ & \dots, \\ & \frac{a_n}{n!} + D_\xi^{n-1} \frac{F_1(a)}{(n-1)!} + D_\xi^{n-2} \frac{F_2(a)}{(n-2)!} + \dots \\ & + D_\xi^{n-m+1} \frac{F_{m-1}(a)}{(n-m+1)!} + D_\xi^{n-m} \frac{F_m(a)}{(n-m)!} = 0, \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

où

$$0 < p \leq m, \quad n \geq m$$

et

$$D_{\xi}^k \frac{F_h(\alpha)}{k!} = \sum \frac{F_h^{(i)}(\alpha)}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!} \left(\frac{\alpha_1}{1!}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{2!}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\alpha_k}{k!}\right)^{\alpha_k}$$

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k = k,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = i = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Des égalités précédentes on tire

$$\begin{aligned} a &= r, \\ a_1 &= - \left[\frac{f_1(\alpha)}{f_0'(\alpha)} \right]_{a=r} = - [F_1(\alpha)]_{a=r}, \\ \frac{a_2}{1.2} &= - \left\{ \frac{1}{f_0'(\alpha)} \left[\frac{\alpha_1^2}{1.2} f_0''(\alpha) + \alpha_1 f_1'(\alpha) + f_2(\alpha) \right] \right\}_{a=r} \\ &= - [\alpha_1 F_1'(\alpha) + F_2(\alpha)]_{a=r}, \\ \frac{a_3}{1.2.3} &= - \left\{ \frac{1}{f_0'(\alpha)} \left[\frac{\alpha_1 \alpha_2}{1.2} f_0''(\alpha) + \frac{\alpha_1^3}{1.2.3} f_0'''(\alpha) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\alpha_2}{1.2} f_1'(\alpha) + \frac{\alpha_1^2}{1.2} f_1''(\alpha) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha_1 f_2'(\alpha) + f_3(\alpha) \right] \right\}_{a=r} \\ &= - \left[\frac{a_2}{1.2} F_1'(\alpha) + \frac{\alpha_1^2}{1.2} F_1''(\alpha) + \alpha_1 F_2'(\alpha) + F_3(\alpha) \right]_{a=r}, \\ &\dots\dots\dots, \\ (11) \quad \frac{a_p}{1.2\dots p} &= - \left\{ \frac{1}{f_0'(\alpha)} \left\{ \sum \frac{f_0^{(j)}(\alpha)}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_{p-1}!} \right. \right. \\ &\quad \times \left(\frac{\alpha_1}{1!} \right)^{\beta_1} \left(\frac{\alpha_2}{2!} \right)^{\beta_2} \dots \left[\frac{\alpha_{p-1}}{(p-1)!} \right]^{\beta_{p-1}} \\ &\quad + D_{\xi}^{p-1} \frac{f_1(\alpha)}{(p-1)!} + D_{\xi}^{p-2} \frac{f_2(\alpha)}{(p-2)!} + \dots \\ &\quad \left. \left. + D_{\xi}^2 \frac{f_{p-2}(\alpha)}{2!} + D_{\xi} f_{p-1}(\alpha) + f_p(\alpha) \right\} \right\}_{a=r} \\ &= - \left[D_{\xi}^{p-1} \frac{F_1(\alpha)}{(p-1)!} + D_{\xi}^{p-2} \frac{F_2(\alpha)}{(p-2)!} + \dots \right. \\ &\quad \left. + D_{\xi}^2 \frac{F_{p-2}(\alpha)}{2!} + D_{\xi} F_{p-1}(\alpha) + F_p(\alpha) \right]_{a=r} \\ &= - \left[\sum_{k=1}^{k=p} D_{\xi}^{p-k} \frac{F_k(\alpha)}{(p-k)!} \right]_{a=r} \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{a_n}{1, 2, \dots, n} = & - \left\{ \frac{1}{f'_0(a)} \left[\sum \frac{f_0^{(j)}(a)}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_{n-1}!} \right. \right. \\
 & \times \left(\frac{a_1}{1!} \right)^{\beta_1} \left(\frac{a_2}{2!} \right)^{\beta_2} \dots \left[\frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right]^{\beta_{n-1}} \\
 & + D_\xi^{n-1} \frac{f_1(a)}{(n-1)!} + D_\xi^{n-2} \frac{f_2(a)}{(n-2)!} + \dots \\
 & + D_\xi^{n-m+1} \frac{f_{m-1}(a)}{(n-m+1)!} \\
 & \left. \left. + D_\xi^{n-m} \frac{f_m(a)}{(n-m)!} \right] \right\}_{a=r} \\
 = & - \left[D_\xi^{n-1} \frac{F_1(a)}{(n-1)!} + D_\xi^{n-2} \frac{F_2(a)}{(n-2)!} + \dots \right. \\
 & \left. + D_\xi^{n-m+1} \frac{F_{m-1}(a)}{(n-m+1)!} + D_\xi^{n-m} \frac{F_m(a)}{(n-m)!} \right]_{a=r} \\
 = & - \left[\sum_{k=1}^{k=m} D_\xi^{n-k} \frac{F_k(a)}{(n-k)!} \right]_{a=r}
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

où

$$n > m \geq p > 0$$

et

$$\begin{aligned}
 1\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + (p-1)\beta_{p-1} &= p, \\
 \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{p-1} &= j = 2, 3, \dots, p, \\
 1\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + (n-1)\beta_{n-1} &= n, \\
 \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1} &= j = 2, 3, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$\begin{aligned}
 y = r - \frac{1}{f'_0(r)} \left\{ x f_1(r) + x^2 \left[S_2 + \sum_{k=1}^{k=2} D_\xi^{2-k} \frac{f_k(a)}{(2-k)!} \right]_{a=r} \right. \\
 + x^3 \left[S_3 + \sum_{k=1}^{k=3} D_\xi^{3-k} \frac{f_k(a)}{(3-k)!} \right]_{a=r} + \dots \\
 + x^p \left[S_p + \sum_{k=1}^{k=p} D_\xi^{p-k} \frac{f_k(a)}{(p-k)!} \right]_{a=r} + \dots \\
 \left. + x^n \left[S_n + \sum_{k=1}^{k=m} D_\xi^{n-k} \frac{F_k(a)}{(n-k)!} \right]_{a=r} + \dots \right\}
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

$$(12) \left\{ \begin{aligned} y &= r - x F_1(r) - x^2 \left[\sum_{k=1}^{k=2} D_{\xi}^{2-k} \frac{F_k(a)}{(2-k)!} \right]_{a=r} \\ &\quad - x^3 \left[\sum_{k=1}^{k=3} D_{\xi}^{3-k} \frac{F_k(a)}{(3-k)!} \right]_{a=r} - \dots \\ &\quad - x^p \left[\sum_{k=1}^{k=p} D_{\xi}^{p-k} \frac{F_k(a)}{(p-k)!} \right]_{a=r} - \dots \\ &\quad - x^m \left[\sum_{k=1}^{k=m} D_{\xi}^{m-k} \frac{F_k(a)}{(m-k)!} \right]_{a=r} - \dots \\ &\quad - x^n \left[\sum_{k=1}^{k=n} D_{\xi}^{n-k} \frac{F_k(a)}{(n-k)!} \right]_{a=r} - \dots, \end{aligned} \right.$$

où

$$n \geq m, \quad m \geq p > 1,$$

$$\begin{aligned} S_k &= \sum \frac{f_0^{(j)}(a)}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_{k-1}!} \\ &\quad \times \left(\frac{a_1}{1!} \right)^{\beta_1} \left(\frac{a_2}{2!} \right)^{\beta_2} \dots \left[\frac{a_{k-1}}{(k-1)!} \right]^{\beta_{k-1}} \\ &= \frac{1}{k!} [D_{\xi}^k f_0(a) - a_k f_0'(a)], \end{aligned}$$

$$1\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + (k-1)\beta_{k-1} = k,$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{k-1} = j = 2, 3, \dots, k;$$

$$(13) \left\{ \begin{aligned} D_{\xi}^k F_h(a) &= D_{\xi}^k \frac{f_h(a)}{\Phi(a)} = D_{\xi}^k \left[\frac{f_h(a)}{a-r} \right] \\ &= k! \sum \frac{D_{\alpha}^i F_h(a)}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!} \left(\frac{a_1}{1!} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{a_2}{2!} \right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{a_k}{k!} \right)^{\alpha_k}, \\ \Phi^{(k)}(r) &= \frac{f_0^{(k+1)}(r)}{k+1}, \end{aligned} \right.$$

$$1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k = k,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = i = 1, 2, \dots, k.$$

En généralisant la première formule (12), on ob-

tient

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} F(y) &= F(r) + \frac{x}{1} [D_{\xi} F(a)]_{a=r} \\ &\quad + \frac{x^2}{1.2} [D_{\xi}^2 F(a)]_{a=r} + \frac{x^3}{1.2.3} [D_{\xi}^3 F(a)]_{a=r} + \dots \\ &\quad + \dots + \frac{x^q}{1.2 \dots q} [D_{\xi}^q F(a)]_{a=r} + \dots \quad (1). \end{aligned} \right.$$

4. Considérons quelques cas particuliers :

1° Si l'on pose

$$\begin{aligned} f_0(y) &= r - y, & f_1(y) &= f(y), \\ f_2(y) &= 0, & f_3(y) &= 0, & \dots, & f_m(y) &= 0, \end{aligned}$$

on a

$$y = r + x f(y)$$

ou

$$x = \frac{y - r}{f(y)} = \varphi(y), \quad F_1(y) = -f(y)$$

et

$$\begin{aligned} y &= \left[a + x f(a) + \frac{x^2}{1} D_{\xi} f(a) \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^3}{1.2} D_{\xi}^2 f(a) + \dots + \frac{x^n}{1.2 \dots (n-1)} D_{\xi}^{n-1} f(a) + \dots \right]_{a=r}. \end{aligned}$$

La formule de Lagrange, démontrée rigoureusement, dans ces derniers temps, par M. Rouché (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXXIX, et *Cours d'Algèbre supérieure* par J.-A. Serret, 1885, t. I, p. 466),

(1) Les relations (9) et (10) peuvent être déduites des équations (2) et (3) aussi à l'aide de cette formule, en prenant

$$y = a + \alpha_1 x + \alpha_2 \frac{x^2}{1.2} + \dots$$

donne

$$\begin{aligned}
 y &= \left\{ a + x f(a) + \frac{x^2}{1.2} D_a[f(a)]^2 \right. \\
 &\quad + \frac{x^3}{1.2.3} D_a^2[f(a)]^3 + \dots \\
 &\quad \left. + \frac{x^n}{1.2 \dots n} D_a^{n-1}[f(a)]^n + \dots \right\}_{a-r} \\
 &= r + x f(r) + \frac{x^2}{1.2} D_r[f(r)]^2 \\
 &\quad + \frac{x^3}{1.2.3} D_r^2[f(r)]^3 + \dots + \frac{x^n}{1.2 \dots n} D_r^{n-1}[f(r)]^n + \dots
 \end{aligned}$$

On a aussi (*Nouvelles Annales*, p. 362; 1888)

$$\begin{aligned}
 y &= \left\{ a + x \left[\frac{1}{\varphi'(a)} D_a \right] a + \frac{x^2}{1.2} \left[\frac{1}{\varphi'(a)} D_a \right]^2 a + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x^n}{1.2 \dots n} \left[\frac{1}{\varphi'(a)} D_a \right]^n a + \dots \right\}_{a-r}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 \frac{a_n}{n!} &= \left[D_{\frac{1}{\varphi'(a)}}^{n-1} \frac{f'(a)}{(n-1)!} \right]_{a-r} \\
 &= \left\{ \sum \frac{f^{(i)}(a)}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_{n-1}!} \left(\frac{\alpha_1}{1!} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{2!} \right)^{\alpha_2} \dots \left[\frac{\alpha_{n-1}}{(n-1)!} \right]^{\alpha_{n-1}} \right\}_{a-r, \alpha_{n-1}} \\
 &= \left\{ D_{a-r}^{n-1} \frac{[f(a)]^n}{n!} \right\}_{a-r} \\
 &= \sum (n-1)! \left[\frac{f(r)}{(n-i)! \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_{n-1}!} \right]^{n-i} \\
 &\quad \times \left[\frac{f'(r)}{1!} \right]^{\alpha_1} \left[\frac{f''(r)}{2!} \right]^{\alpha_2} \dots \left[\frac{f^{(n-1)}(r)}{(n-1)!} \right]^{\alpha_{n-1}} \\
 &= \frac{1}{n!} \left\{ \left[\frac{1}{\varphi'(a)} D_a \right]^n a \right\}_{a-r},
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 1 \alpha_1 + 2 \alpha_2 + \dots + (n-1) \alpha_{n-1} &= n-1, \\
 \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} &= i = 1, 2, \dots, n-1.
 \end{aligned}$$

2° Prenons

$$\begin{aligned}
 f_0(y) &= f(y), & f_1(y) &= -1, \\
 f_2(y) &= 0, & \dots, & f_m(y) = 0;
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} f(\mathcal{Y}) &= x, & \mathcal{Y} &= r + x \left[\frac{1}{\Phi(\mathcal{Y})} \right], & \mathbf{F}_1(\mathcal{Y}) &= -\frac{1}{\Phi(\mathcal{Y})}, \\ \Phi(\mathcal{Y}) &= \frac{f(\mathcal{Y})}{\mathcal{Y} - r}, & f(r) &= 0, \\ \Phi(r) &= f'(r), & \Phi^k(r) &= \frac{f^{(k+1)}(r)}{k+1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} = \left[a + x \frac{1}{\Phi(a)} + \frac{x^2}{1} \mathbf{D}_\xi \frac{1}{\Phi(a)} + \frac{x^3}{1.2} \mathbf{D}_\xi^2 \frac{1}{\Phi(a)} + \dots \right. \\ \left. + \frac{x^n}{1.2 \dots (n-1)} \mathbf{D}_\xi^{n-1} \frac{1}{\Phi(a)} + \dots \right]_{a=r}. \end{aligned}$$

La formule de Lagrange donne

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} = \left\{ a + x [\Phi(a)]^{-1} + \frac{x^2}{1.2} \mathbf{D}_a [\Phi(a)]^{-2} \right. \\ \left. + \frac{x^3}{1.2.3} \mathbf{D}_a^2 [\Phi(a)]^{-3} + \dots \right. \\ \left. + \frac{x^n}{1.2 \dots n} \mathbf{D}_a^{n-1} [\Phi(a)]^{-n} + \dots \right\}_{a=r}. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} = \left\{ a + x \left[\frac{1}{f'(a)} \mathbf{D}_a \right] a + \frac{x^2}{1.2} \left[\frac{1}{f'(a)} \mathbf{D}_a \right]^2 a + \dots \right. \\ \left. + \frac{x^n}{1.2 \dots n} \left[\frac{1}{f'(a)} \mathbf{D}_a \right]^n a + \dots \right\}_{a=r}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_n}{n!} &= \left\{ \mathbf{D}_\xi^{n-1} \frac{[\Phi(a)]^{-1}}{(n-1)!} \right\}_{a=r}, \\ &= - \left\{ \frac{1}{f'(a)} \sum_{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_{n-1}!} \frac{f^{(j)}(a)}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_{n-1}!} \left(\frac{a_1}{1!} \right)^{\beta_1} \left(\frac{a_2}{2!} \right)^{\beta_2} \dots \left[\frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right]^{\beta_{n-1}} \right\}_{a=r, n-1} \\ &= \left\{ \mathbf{D}_a^{n-1} \frac{[\Phi(a)]^{-n}}{n!} \right\}_{a=r} = \sum \frac{(-1)^i (n+i-1)! [f'(r)]^{-(n+i)}}{n! \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_{n-1}!} \\ &\quad \times \left[\frac{f''(r)}{2!} \right]^{\alpha_1} \left[\frac{f'''(r)}{3!} \right]^{\alpha_2} \dots \left[\frac{f_n(r)}{n!} \right]^{\alpha_{n-1}} = \frac{1}{n!} \left\{ \left[\frac{1}{f'(a)} \mathbf{D}_a \right]^n a \right\}_{a=r}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} 1 \alpha_1 + 2 \alpha_2 + \dots + (n-1) \alpha_{n-1} &= n-1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} &= i = 1, 2, 3, \dots, n-1, \\ 1 \beta_1 + 2 \beta_2 + \dots + (n-1) \beta_{n-1} &= n, \\ \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n-1} &= j = 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

3° Soit

$$f(x, y) = P_0(y) + x P_1(y) + x^2 P_2(y) + \dots + x^{m-1} P_{m-1}(y) + x^m P_m(y) = 0,$$

où

$$\begin{aligned} P_0(y) &= A_0 y^m + B_0 y^{m-1} + C_0 y^{m-2} + \dots + K_0 y^2 + L_0 y + M_0, \\ P_1(y) &= A_1 y^{m-1} + B_1 y^{m-2} + C_1 y^{m-3} + \dots + K_1 y + L_1, \\ &\dots\dots\dots, \\ P_{m-1}(y) &= A_{m-1} y + B_{m-1}, \quad P_m(y) = A_m. \end{aligned}$$

Alors, en faisant $\frac{y}{x} = u$ et $\frac{1}{x} = z$, on a aussi

$$\begin{aligned} x^m [Q_0(u) + z Q_1(u) + z^2 Q_2(u) + \dots + z^{m-1} Q_{m-1}(u) + z^m Q_m(u)] &= 0, \\ Q_0(u) + z Q_1(u) + z^2 Q_2(u) + \dots + z^{m-1} Q_{m-1}(u) + z^m Q_m(u) &= 0, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} Q_0(u) &= A_0 u^m + A_1 u^{m-1} + A_2 u^{m-2} + \dots + A_{m-1} u + A_m, \\ Q_1(u) &= B_0 u^{m-1} + B_1 u^{m-2} + B_2 u^{m-3} + \dots + B_{m-2} u + B_{m-1}, \\ &\dots\dots\dots, \\ Q_{m-1}(u) &= L_0 u + L_1, \quad Q_m(u) = M_0. \end{aligned}$$

Par suite, nous pouvons obtenir, dans ce cas, les séries suivantes

$$\begin{aligned} y &= a + a_1 x + \frac{a_2}{1.2} x^2 + \frac{a_3}{1.2.3} x^3 + \dots + \frac{a_n}{1.2\dots n} x^n + \dots, \\ u &= b + b_1 z + \frac{b_2}{1.2} z^2 + \frac{b_3}{1.2.3} z^3 + \dots + \frac{b_n}{1.2\dots n} z^n + \dots \end{aligned}$$

et

$$y = xu = bx + b_1 + \frac{b_2}{1.2.x} + \frac{b_3}{1.2.3.x^2} + \dots + \frac{b_n}{1.2\dots n.x^{n-1}} + \dots,$$

où les coefficients $a, a_1, \dots, \frac{a_n}{n!}$ et $b, b_1, \dots, \frac{b_n}{n!}$ se détermineront au moyen des formules (11), en y remplaçant respectivement

$$f'_0(r), f''_0(r), \dots, f_k(r), f'_k(r), f''_k(r), \dots,$$

par

$$P'_0(r), P''_0(r), \dots, P_k(r), P'_k(r), P''_k(r), \dots,$$

et par

$$Q'_0(r_1), Q''_0(r_1), \dots, Q_k(r_1), Q'_k(r_1), Q''_k(r_1), \dots,$$

et en supposant que r, r_1 soient des racines simples des équations $P_0(y) = 0, Q_0(u) = 0$ respectivement (J.-A. SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*, 1885, t. I, p. 610).

4° Enfin, posons, dans l'équation (2), $f_0(y) = r - y$; on a alors

$$y = r + x f_1(y) + x^2 f_2(y) + x^3 f_3(y) + \dots + x^m f_m(y)$$

et

$$y = r$$

$$\begin{aligned} &+ x f_1(r) + x^2 \left[\sum_{k=1}^{k=2} \frac{D_{\xi}^{2-k} f_k(a)}{(2-k)!} \right]_{a=r} \\ &+ x^3 \left[\sum_{k=1}^{k=3} \frac{D_{\xi}^{3-k} f_k(a)}{(3-k)!} \right]_{a=r} + \dots \\ &+ x^p \left[\sum_{k=1}^{k=p} \frac{D_{\xi}^{p-k} f_k(a)}{(p-k)!} \right]_{a=r} + \dots \\ &+ x^m \left[\sum_{k=1}^{k=m} \frac{D_{\xi}^{m-k} f_k(a)}{(m-k)!} \right]_{a=r} + \dots \\ &+ x^n \left[\sum_{k=1}^{k=m} \frac{D_{\xi}^{n-k} f_k(a)}{(n-k)!} \right]_{a=r} + \dots; \end{aligned}$$

ou, généralement,

$$\begin{aligned} F(y) &= F(r) + \frac{x}{1} [D_{\xi} F(a)]_{a=r} \\ &+ \frac{x_2}{1.2} [D_{\xi}^2 F(a)]_{a=r} \\ &+ \frac{x_3}{1.2.3} [D_{\xi}^3 F(a)]_{a=r} + \dots \\ &+ \frac{x^q}{1.2\dots q} [D_{\xi}^q F(a)]_{a=r} + \dots, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \left[\frac{D_{\xi}^q F(a)}{q!} \right]_{a=r} &= \sum \frac{F^{(i)}(r)}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_q!} [f_1(r)]^{\alpha_1} \\ &\times \left[\sum_{k=1}^{k=2} \frac{D_{\xi}^{2-k} f_k(a)}{(2-k)!} \right]_{a=r}^{\alpha_2} \dots \\ &\times \left[\sum_{k=1}^{k=p} \frac{D_{\xi}^{p-k} f_k(a)}{(p-k)!} \right]_{a=r}^{\alpha_p} \dots \\ &\times \left[\sum_{k=1}^{k=m} \frac{D_{\xi}^{q-k} f_k(a)}{(q-k)!} \right]_{a=r}^{\alpha_q}, \\ &(p \leq m). \end{aligned}$$

§. Soit

$$Y = \alpha + \alpha_1 x + \frac{\alpha_2}{1.2} x^2 + \dots + \frac{\alpha_m}{1.2\dots m} x^m + \dots$$

une racine de l'équation générale (algébrique ou transcendante)

$$f(y, x) = 0.$$

Prenons la fonction de t

$$\Phi(t) = f(y, x, t) = f(y, z),$$

où $z = xt$ et les variables y, x ne dépendent pas de t , de sorte que

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^k f}{\partial t^k} = x^k \frac{\partial^k f}{\partial z^k},$$

et supposons que cette fonction, pour les valeurs de t

comprises entre 0 et 1, soit développable, par la formule de Maclaurin, suivant les puissances croissantes de t ; on a alors

$$\begin{aligned} f(y, xt) &= f(y, z) = \psi(t) = \psi(0) + t\psi'(0) \\ &\quad + \frac{t^2}{1.2}\psi''(0) + \dots + \frac{t^m}{1.2\dots m}\psi^{(m)}(0) + \dots \\ &= f(y, 0) + t x [D_z f(y, z)]_{z=0} \\ &\quad + \frac{t^2 x^2}{1.2} [D_z^2 f(y, z)]_{z=0} + \dots \\ &\quad + \frac{t^m x^m}{1.2\dots m} [D_z^m f(y, z)]_{z=0} + \dots, \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} f(y, 0) &= f_0(y), \quad [D_z f(y, z)]_{z=0} = f_1(y), \\ \left[\frac{D_z^2 f(y, z)}{1.2} \right]_{z=0} &= f_2(y), \quad \dots, \\ \left[\frac{D_z^m f(y, z)}{1.2\dots m} \right]_{z=0} &= f_m(y), \quad \dots, \end{aligned}$$

on obtient, pour $t = 1$, ($z = x$),

$$f(y, x) = f_0(y) + x f_1(y) + x^2 f_2(y) + \dots + x^m f_m(y) + \dots = 0.$$

Par conséquent, en désignant par r une racine simple de l'équation $f(y, 0) = 0$ et en considérant a comme fonction d'une variable fictive ξ , dont les dérivées successives seraient $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$, on trouve à l'aide des formules (11), (12)

$$\begin{aligned} a &= r, \\ a_1 &= - \left[\frac{D_x f(a, x)}{D_a f(a, x)} \right]_{a=r, x=0}, \\ \frac{a_2}{1.2} &= - \left\{ \frac{1}{D_a f(a, x)} \left[\frac{a_1^2}{1.2} D_a^2 f(a, x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_1 D_a D_x f(a, x) + \frac{D_x^2 f(a, x)}{1.2} \right] \right\}_{a=r, x=0}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\frac{a_m}{1.2\dots m} = - \left(\frac{1}{D_a f(a, x)} \left\{ \sum \frac{D_a^j f(a, x)}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_{m-1}!} \right. \right. \\ \times \left(\frac{a_1}{1!} \right)^{\beta_1} \left(\frac{a_2}{2!} \right)^{\beta_2} \dots \left[\frac{a_{m-1}}{(m-1)!} \right]^{\beta_{m-1}} \\ \left. \left. + \sum_{k=1}^{k=m} \frac{D_{\xi}^{m-k} D_x^k f(a, x)}{(m-k)! k!} \right\} \right)_{a=r, x=0}$$

et

$$\gamma = r - \frac{1}{[D_a f(a, x)]_{x=0}^{a=r}} \left\{ x [D_x f(a, x)]_{x=0}^{a=r} \right. \\ + x^2 \left[S'_2 + \sum_{k=1}^{k=2} \frac{D_{\xi}^{2-k} D_x^k f(a, x)}{(2-k)! k!} \right]_{x=0}^{a=r} \\ + x^3 \left[S'_3 + \sum_{k=1}^{k=3} \frac{D_{\xi}^{3-k} D_x^k f(a, x)}{(3-k)! k!} \right]_{x=0}^{a=r} + \dots \\ \left. + x^m \left[S'_m + \sum_{k=1}^{k=m} \frac{D_{\xi}^{m-k} D_x^k f(a, x)}{(m-k)! k!} \right]_{x=0}^{a=r} + \dots \right\},$$

où

$$S'_k = \sum \frac{D_a^k f(a, x)}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_{k-1}!} \left(\frac{a_1}{1!} \right)^{\beta_1} \left(\frac{a_2}{2!} \right)^{\beta_2} \dots \left[\frac{a_{k-1}}{(k-1)!} \right]^{\beta_{k-1}} \\ = \frac{1}{k!} [D_{\xi}^k f(a, x) - a_k D_a f(a, x)],$$

$$\frac{D_{\xi}^k D_x^h f(a, x)}{k! h!} \\ = \sum \frac{D_a^i D_x^h f(a, x)}{h! \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!} \left(\frac{a_1}{1!} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{a_2}{2!} \right)^{\alpha_2} \dots \left[\frac{a_k}{k!} \right]^{\alpha_k}, \\ \begin{cases} 1\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + (k-1)\beta_{k-1} = k, \\ \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{k-1} = j = 2, 3, \dots, k, \\ 1\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k = k, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = i = 1, 2, \dots, k. \end{cases}$$

Aussi, en ayant égard à l'égalité

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k!} \left[D_{\xi}^k f_0(a) - a_k f_0'(a) \right] \\ &= \sum \frac{f_0^{(j)}(a)}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_{k-1}!} \left(\frac{a_1}{1!} \right)^{\beta_1} \left(\frac{a_2}{2!} \right)^{\beta_2} \dots \left[\frac{a_{k-1}}{(k-1)!} \right]^{\beta_{k-1}} = S_k, \end{aligned}$$

nous pouvons exprimer une racine de l'équation $f(y, x) = 0$, et, par suite, celle de l'équation (2), de la manière suivante

$$\begin{aligned} y = r + x & \left[\frac{a_1}{1!} - \sum_{k=0}^{k-1} \frac{D_{\xi}^{1-k} f_k(a)}{(1-k)! f_0'(a)} \right]_{a=r} \\ & + x^2 \left[\frac{a_2}{1!} - \sum_{k=0}^{k=2} \frac{D_{\xi}^{2-k} f_k(a)}{(2-k)! f_0'(a)} \right]_{a=r} \\ & + x^3 \left[\frac{a_3}{1!} - \sum_{k=0}^{k=3} \frac{D_{\xi}^{3-k} f_k(a)}{(3-k)! f_0'(a)} \right]_{a=r} + \dots \\ & + x^m \left[\frac{a_m}{m!} - \sum_{k=0}^{k=m} \frac{D_{\xi}^{m-k} f_k(a)}{(m-k)! f_0'(a)} \right]_{a=r} + \dots \end{aligned}$$
