

Concours général de 1893

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 160-167

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__160_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1895.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Mathématiques.

On donne une conique S et un triangle ABC conjugué par rapport à cette conique :

1° Démontrer que par un point quelconque P de S passent quatre coniques circonscrites au triangle ABC et touchant S chacune en un point autre que P ;

2° Les points où ces quatre coniques touchent S sont situés sur une conique S_1 circonscrite au triangle ABC ;

3° Quand le point P décrit la conique S , la conique S_1 enveloppe une courbe Γ du 4^e ordre ;

4° D'un point M de la courbe Γ , on peut mener à cette courbe quatre tangentes autres que celle qui touche la courbe au point M . Démontrer que les points où ces quatre tangentes touchent Γ sont sur une même droite D et trouver l'enveloppe de la droite D quand le point M décrit la courbe Γ .

Physique.

I. Détermination de la densité des vapeurs.

II. Deux lentilles convergentes, de diamètres $2L$ et $2L'$, sont placées à une distance l'une de l'autre D , très grande par rapport à leurs distances focales f et f' , les axes en coïncidence.

A une distance d de la première et concentriquement à l'axe, on place un objet lumineux ayant la forme d'un disque

circulaire de rayon r , et de la même manière, à une distance d' derrière la seconde, un petit miroir sphérique de diamètre $2m$ et de distance focale φ ; de telle sorte que les rayons émanés de l'objet, ramenés au point de départ, donnent de cet objet, ou tout au moins d'une portion de sa surface, une image réelle.

On demande :

1° Comment il faudra disposer de d et de d' , de m et de φ pour utiliser au mieux, pour la formation de l'image, les rayons émanés de l'objet;

2° Quelle sera la grandeur de l'image de retour;

3° Son éclat intrinsèque;

4° Enfin quelle valeur il faudrait donner à L' pour avoir l'image entière du disque lumineux.

Chimie.

I. Hydracides étudiés dans le cours.

II. On dissout 24^{gr} de brome dans une solution concentrée contenant 16^{gr},8 d'hydrate de potasse.

Le liquide porté à l'ébullition et évaporé à sec donne un résidu que l'on pèse.

Ce résidu calciné à une température élevée dégage un gaz dont on mesure le volume, et laisse un nouveau résidu dont on détermine le poids.

On mélange le gaz recueilli avec celui que l'on prépare en chauffant 28^{gr},8 d'acide formique pur avec un excès d'acide sulfurique, et l'on fait passer une étincelle dans le mélange gazeux. Le résidu gazeux est agité avec une dissolution de potasse, et le nouveau résidu gazeux mesuré sec est mélangé avec un volume de chlore et exposé au soleil. On mesure ensuite le volume du gaz et on l'agite avec 10^{cc} d'eau.

On mesure le volume gazeux final.

On demande :

1° Le poids et la composition de chacun des résidus solides;

2° La nature et le volume à 0° et sous 760^{mm} des diverses masses gazeuses obtenues successivement.

Le coefficient de solubilité de l'acide carbonique dans l'eau est 1.

$$K = 39, \quad Br = 80.$$

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Mathématiques et Mécanique.

I. On donne dans un plan un triangle fixe abc , et l'on considère un triangle ABC égal au triangle abc , et mobile dans le plan. On suppose le triangle mobile ABC d'abord superposé au triangle fixe abc , A en a , B en b , C en c .

Soit O un point du plan tel que, si l'on fait tourner autour de ce point le triangle mobile ABC de façon à l'amener de sa première position à une autre pour laquelle le côté AB est devenu parallèle au côté ac , le triangle ABC se place sur un triangle $a'b'c'$ (A en a' , B en b' , C en c'), tel que le sommet b' est situé sur la droite Oc.

1° Trouver la ligne (L) lieu des points O qui satisfont à cette condition.

2° Trouver le lieu décrit par chacun des sommets du triangle $a'b'c'$ quand le point O décrit la ligne (L).

II. Étant données, dans un plan, une parabole et une droite D perpendiculaire à l'axe de cette parabole, trouver sur l'axe de la parabole un point A tel que, si M est un point de la parabole et si P est le pied de la perpendiculaire à la droite D menée par le point M, la différence $\overline{MA}^2 - \overline{MP}^2$ est constante, quelle que soit la position du point M sur la parabole.

Trouver le lieu des points d'un plan tels que la différence des carrés des distances de chacun de ces points à un point A et à une droite D, donnée dans le plan, soit constante et égale à une quantité donnée.

Montrer que la connaissance de ce lieu permet de résoudre, avec la règle et le compas, le problème suivant :

Étant donnés dans un plan une droite D et deux cercles C, C', mener un cercle qui soit tangent à la droite D, qui coupe le cercle C en deux points diamétralement opposés sur ce cercle C, et le cercle C' en deux points diamétralement opposés sur ce cercle C'.

PREMIÈRE-SCIENCES (ENSEIGNEMENT MODERNE).

Mathématiques.

On considère l'ellipse E qui a pour grand axe AOA' et pour foyers F et F' :

1° Construire un cercle C bitangent (tangent en deux points) à la courbe E, ayant son centre en un point D donné sur AOA', à une distance m du centre de l'ellipse. Déterminer géométriquement les points de contact.

2° Calculer la distance du centre de l'ellipse à la corde des contacts et le rayon du cercle C en fonction des données a , c , m .

Discuter ces valeurs. Examen du cas particulier où la corde des contacts passe par l'un des sommets du grand axe.

3° On considère deux cercles C et C', ayant leurs centres sur AOA', tous deux bitangents à l'ellipse E : prouver géométriquement que la somme (ou la différence) des longueurs des tangentes aux cercles C et C', issues d'un point M de l'ellipse, ne varie pas quand ce point M se déplace sur la courbe.

Calculer la valeur de la constante en fonction de a , de c et des distances des cordes de contact au centre de l'ellipse.

RHÉTORIQUE.

Géométrie et Cosmographie.

On donne trois droites parallèles RR', SS', TT', non situées dans un même plan, et sur la droite RR' un point A, sur la droite SS' un point B et sur la droite TT' un point C. On convient d'appeler *mesures algébriques* de segments Aa, Bb, Cc, pris sur les parallèles données, les nombres qui sont les mesures des longueurs de ces segments, prises avec une même unité de longueur, chacun de ces nombres étant précédé du signe + ou du signe —, selon que le segment considéré est, par rapport au plan des trois points A, B, C, du même côté que la demi-droite AR, ou du côté opposé. On considère tous les plans qui coupent les trois parallèles données en des points a , b , c , tels que la somme des *mesures algébriques* des segments Aa, Bb, Cc soit constante et égale à un nombre donné.

1° Démontrer que tous les plans ainsi considérés ont un point commun.

2° Soit H un point donné dans l'espace. Trouver le lieu des projections de ce point H sur tous les plans considérés.

3° Soit H' un second point donné dans l'espace. Trouver le lieu de la droite d'intersection de deux des plans considérés, tels que la projection du point H sur l'un se confonde avec la projection du point H' sur l'autre.

4° Si, sans rien changer aux autres données du problème, on fait varier le nombre qui est la somme des mesures algébriques des segments Aa, Bb, Cc, le point commun G aux plans considérés se déplace, trouver la ligne décrite par ce point.

Déterminer sur cette ligne les positions du point G pour lesquelles l'angle HGH' est égal à un angle donné, et discuter ce dernier problème dans le cas particulier où la droite HH' est dans un plan perpendiculaire à la droite RR'.

SECONDE CLASSIQUE.

Algèbre et Géométrie.

I. Résoudre les équations

$$\frac{x}{a-1} + \frac{y}{a-3} + \frac{z}{a-5} = 0,$$

$$\frac{x}{a-3} + \frac{y}{a-5} + \frac{z}{a-7} = 0,$$

$$x - y + z = 8.$$

Démontrer que les valeurs des inconnues peuvent être mises sous les formes suivantes :

$$x = (a-1)(a-3),$$

$$y = -2(a-3)(a-5),$$

$$z = (a-5)(a-7).$$

Déterminer le nombre a de manière que ces valeurs soient entières et positives.

II. On coupe un angle trièdre par un plan P qui rencontre les arêtes aux points A, B, C.

(165)

Trouver le lieu du point de rencontre des médianes du triangle ABC :

1° Lorsque le plan P se déplace, de manière que le point A reste fixe ;

2° Lorsque le plan P se déplace, de manière que la droite AB reste fixe ;

3° Lorsque le plan P se déplace, de manière que les différences $(OB - OA)$ et $(OC - OA)$ restent constantes. Le point O désigne le sommet de l'angle trièdre.

SECONDE MODERNE.

Mathématiques.

I. Dans le quadrilatère convexe ABCD, on donne

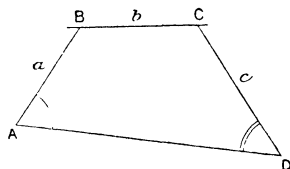
$$AB = a = 2652^m, 7,$$

$$BC = b = 3528^m, 6,$$

$$CD = c = 4715^m, 8,$$

$$\widehat{BAD} = 61^\circ 32' 15'', 5,$$

$$\widehat{ADC} = 43^\circ 58' 45'', 8.$$



Calculer le côté AD et les autres angles. (On se servira des Tables de logarithmes à 5 décimales.)

II. Étant donné un prisme oblique dont la base est le parallélogramme ABCD, et une droite xy , parallèle à la diagonale BD, dans le plan ABC, mener par xy un plan rencontrant les arêtes du prisme aux points A', B', C', D', de telle sorte que le volume du tronc de prisme ABCD A'B'C'D' ait pour valeur m^3 ; on connaît l'aire p^2 de la section droite du prisme considéré. Indiquer toutes les constructions graphiques nécessaires pour obtenir les sommets de la section, m et p étant des lignes données.

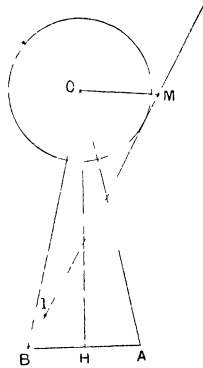
TROISIÈME CLASSIQUE.

Arithmétique, Algèbre et Géométrie.

I. Soit n un nombre entier quelconque: trouver le plus petit commun multiple des trois nombres

$$n, \quad n+1, \quad n+2.$$

II. Soit un triangle isocèle OAB, ayant pour côtés égaux OA et OB, et pour hauteur OH; on décrit, du point O comme centre, un cercle C, de rayon arbitraire, et on lui mène deux



tangentes non symétriques par rapport à OH, issues l'une du point A, l'autre du point B: ces deux tangentes se coupent en un point M.

1° Trouver le lieu géométrique du point M, lorsque le rayon du cercle C varie.

2° Trouver, dans la même hypothèse, le lieu du point I, obtenu en portant sur MB, à partir de M, une longueur MI égale à MA.

3° Démontrer que le produit $MA \cdot MB$ est égal à la différence $\overline{OA}^2 - \overline{OM}^2$, ou à la différence $\overline{OM}^2 - \overline{OA}^2$, selon que l'on a

$$OA > OM \quad \text{ou} \quad OM > OA.$$

TROISIÈME MODERNE.

Mathématiques.

I. Soit M l'un des points du plan du triangle ABC, tels que les aires des triangles MBC, MCA, MAB soient proportionnelles aux nombres donnés a' , b' , c' .

1° Prouver que la droite qui joint deux quelconques des points M passe par un des sommets de ABC.

2° Un des points M étant connu, construire graphiquement tous les autres.

3° Calculer la somme algébrique des inverses des distances de tous les points M aux côtés de ABC, en fonction des longueurs a , b , c de ces côtés et des nombres a' , b' , c' .

II. Étant donnés quatre points A, B, C, D d'un même plan, on peut, par ces points, faire passer trois couples de deux droites (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC).

1° Tracer par le point O, commun aux droites d'un même couple, une droite MON telle que le point O soit le milieu de la portion MN comprise entre les droites d'un deuxième couple. Examiner les cas possibles de figure, et donner le nombre des solutions.

2° Soit O' le point commun aux droites de ce second couple. On représente par a , b , c , d les distances de ce point aux points A, B, C, D, et l'on propose de calculer la longueur MN : on supposera, pour ce calcul seulement, que les droites se coupant en O' sont perpendiculaires entre elles; voir si la formule trouvée s'applique à tous les cas de la figure.

3° En supposant les quatre points A, B, C, D situés sur un même cercle, prouver que le centre de ce cercle se projette en O sur MN.