

J. RÉVEILLE

Note sur une propriété de l'hyperbole équilatère

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 13
(1894), p. 100-102

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1894_3_13__100_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DE L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE;

PAR M. J. RÉVEILLE.

On sait qu'un faisceau F de coniques passant par quatre points détermine, sur une droite donnée, une série de points en involution.

Il est facile de voir qu'un faisceau F' de coniques passant par trois points et déterminant sur une droite donnée D une série de points en involution se compose de coniques passant par un quatrième point commun.

Prenons, en effet, deux coniques c et c' du faisceau F' , et soit α le quatrième point d'intersection, les trois autres étant β , γ , δ . Considérons le faisceau F des coniques passant par α , β , γ , δ . Il détermine sur la droite D la même involution que le faisceau F' , puisqu'il contient deux coniques c et c' de ce faisceau, et que deux couples de points suffisent pour déterminer une involution. Les deux faisceaux F et F' n'en forment donc qu'un seul.

Cela posé, considérons le faisceau des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle.

Par un point P du plan du triangle, je mène des parallèles aux asymptotes de chacune de ces hyperboles.

J'obtiens un double faisceau de droites engendré par la rotation d'un angle droit pivotant autour de son sommet P. Ce double faisceau détermine sur une droite quelconque, et en particulier sur la droite de l'infini, une série de points en involution.

Ces points, où les droites du faisceau P rencontrent la droite de l'infini, sont évidemment les mêmes points où cette droite est rencontrée par les asymptotes des hyperboles, et, par conséquent, par les hyperboles elles-mêmes. Ces hyperboles forment donc un faisceau de coniques passant par trois points et déterminant sur une droite (la droite de l'infini) une série de points en involution.

Donc elles passent par un quatrième point.

La conique formée par un côté du triangle et la hauteur correspondante est évidemment une hyperbole du faisceau. Le point de rencontre des hauteurs est donc le quatrième point.

Le lieu des pôles d'une droite D par rapport aux coniques passant par quatre points fixes est une conique.

Cherchons, en effet, quels sont les points du lieu situés sur la droite D. Puisque, pour ces points, le pôle est sur la polaire, on les obtiendra en déterminant les points de contact de D avec les coniques du faisceau qui lui sont tangentes. Ce sont les deux points doubles de l'involution déterminée par le faisceau de coniques sur la droite.

Le lieu est donc du second degré.

Supposons que la droite D s'éloigne à l'infini.

Le lieu précédent devient le lieu des centres des coniques. C'est encore une conique ayant pour directions asymptotiques les directions des axes des deux paraboles du faisceau.

Dans le cas des hyperboles équilatères passant par les trois sommets d'un triangle, la conique lieu des centres coupe la droite de l'infini aux deux points doubles de l'involution déterminée par un angle droit qui pivote autour de son sommet.

Or on sait que ces deux points doubles sont les points cycliques du plan.

Donc le lieu des centres est un cercle.