

WEILL

Propriété d'une classe de courbes

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 12
(1893), p. 93-95

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__93_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉ D'UNE CLASSE DE COURBES;

PAR M. WEILL.

THÉORÈME. — *Si l'on coupe la courbe qui a pour équation $y^m = x^p$ par une droite quelconque, et si l'on mène les tangentes à la courbe aux points d'intersection, elles forment un polygone dont tous les sommets sont sur une courbe qui a pour équation $y^m = kx^p$; en particulier, si la droite est tangente à la courbe, on a $k = 1$.*

Un point de la courbe a pour coordonnées

$$x = \theta^m, \quad y = \theta^p.$$

L'équation qui donne les valeurs de θ relatives aux points de rencontre d'une droite $x = Ay + B$ et de la courbe est

$$\theta^m = A\theta^p + B.$$

La tangente au point θ a pour équation

$$(p - m)\theta^m - px + my^{\theta^{m-p}} = 0.$$

Considérons deux points de rencontre θ, θ' , et posons $\theta^p = \lambda, \theta'^p = \lambda'p$, nous aurons

$$\theta^m = A\theta^p + B,$$

$$\theta'^m = A\theta'^p + B.$$

d'où

$$(\theta\theta')^{mp} = [(A\theta^p + B)(A\theta'^p + B)]^p$$

ou

$$(1) \quad (\lambda\lambda')^m = [(A\lambda + B)(A\lambda' + B)]^p.$$

D'autre part, les tangentes aux deux points ont pour

équations

$$(p - m)\theta^m - px + my\theta^{m-p} = 0,$$

$$(p - m)\theta'^m - px + my\theta'^{m-p} = 0;$$

remplaçons dans ces équations θ^p par λ et θ^m par $A\lambda + B$, nous aurons

$$(p - m)(A\lambda + B) - px + my \frac{A\lambda + B}{\lambda} = 0$$

ou

$$(2) A\lambda^2(p - m) - \lambda[B(p - m) - px + Amy] + Bmy = 0;$$

dans cette équation, x, y sont les coordonnées du point de rencontre des deux tangentes, et cette équation admet pour racines λ et λ' ; donc

$$\lambda\lambda' = \frac{Bmy}{A(p - m)},$$

$$\lambda + \lambda' = \frac{B(p - m) - px + Amy}{A(m - p)};$$

transportons ces valeurs dans l'équation (1), nous voyons que les coordonnées (x, y) vérifient l'équation

$$\left[\frac{Bmy}{A(p - m)} \right]^m = \left[\frac{A^2Bmy}{A(p - m)} - \frac{B(p - m) - px + Amy}{A(p - m)} AB + B^2 \right]^p$$

ou

$$y^m = x^p \frac{p^p (p - m)^{m-p} A^{m-p}}{m^m B^m}.$$

Il est facile de vérifier que le coefficient de x^p est 1 si la droite est tangente à la courbe donnée.

Remarques. — 1° En transformant la courbe en elle-même par polaires réciproques, on a l'énoncé suivant : Si d'un point du plan on mène à la courbe des tangentes, les droites qui joignent deux à deux les points de contact sont tangentes à une courbe de même espèce.

2° En transformant homographiquement, on a la courbe

$$x^m = \beta^p \gamma^{m-p},$$

α, β, γ désignant trois fonctions linéaires; en appliquant ensuite la transformation du deuxième ordre définie par les formules

$$x = y' z', \quad y = x' z', \quad z = x' y',$$

qui transforme la courbe en elle-même, on a un énoncé où les droites sont remplacées par des coniques passant par les trois points fondamentaux.

3° L'équation $y^m = x^p$ peut s'écrire $y = x^k$, k étant quelconque, entier ou fractionnaire; mais le théorème est encore vrai si l'on suppose k incommensurable: la courbe est alors transcendante, et le nombre des sommets du polygone demeure infini.

4° Lorsque la droite $x = Ay + B$ se déplace en restant tangente à la courbe

$$y^m = \lambda x^p,$$

si, aux points où elle coupe la courbe $y^m = x^p$, on mène les tangentes, le lieu des sommets du polygone formé par ces tangentes est la courbe

$$y^m = \lambda' x^p.$$

5° Si, aux points où une droite $x = Ay + B$ coupe la courbe $y^m = x^p$, on mène les normales, les sommets du polygone formé par ces normales sont sur la courbe

$$(B - x)^m = \lambda(Ay + B)^p.$$
