

R. GODEFROY

## **Construction du centre de courbure de certaines courbes**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 12  
(1893), p. 85-88

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1893\\_3\\_12\\_85\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12_85_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE DE CERTAINES COURBES;

PAR M. R. GODEFROY,  
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Considérons une courbe quelconque rapportée à un système d'axes rectangulaires  $xOy$ . En un point  $A(x, y)$  de la courbe, le centre de courbure est  $C$ ; la normale  $AC$  rencontre  $Ox$  au point  $B(X, 0)$  sous l'angle  $\alpha$ ; les perpendiculaires en  $B$  et  $C$  à  $Ox$  et à  $AC$  se coupent au point  $M$ .

On a

$$\frac{BM}{CA} = \frac{d(B)}{d(A)},$$

mais

$$BM = \frac{CB}{\sin \alpha},$$

$$d(B) = dX,$$

$$d(A) = \frac{dx}{\sin \alpha};$$

ces valeurs, portées dans la formule ci-dessus, la transforment en celle-ci

$$\frac{CB}{CA} = \frac{dX}{dx} \sin^2 \alpha,$$

dont nous allons faire usage.

Les courbes que nous avons en vue sont celles dont les distances  $r, r'$  d'un quelconque de leurs points à un point fixe  $O$  et à une droite fixe  $PQ$  sont liées par la

relation

$$\frac{r^m}{r'^n} = \text{const.},$$

$m$  et  $n$  étant quelconques.

Prenons respectivement pour axes de coordonnées  $Ox$  et  $Oy$  la perpendiculaire et la parallèle à  $PQ$ , menées par le point  $O$ .

Conservons d'ailleurs les notations du lemme.

On aura

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ r' &= x + a, \end{aligned}$$

et l'équation de la courbe pourra toujours se mettre sous la forme

$$x^2 + y^2 - K(x + a)^p = 0.$$

On a ici

$$X = \frac{pKy(x+a)^{p-1}}{2y} = \frac{pK(x+a)^{p-1}}{2};$$

la formule

$$\frac{CB}{CA} = \frac{dX}{dx} \sin^2 \alpha$$

deviendra

$$\frac{CB}{CA} = \frac{p(p-1)}{2} K(x+a)^{p-2} \sin^2 \alpha;$$

mais, de l'équation de la courbe, on tire

$$K(x+a)^{p-2} = \frac{x^2 + y^2}{(x+a)^2};$$

or

$$\frac{x^2 + y^2}{(x+a)^2} = \frac{r^2}{r'^2},$$

donc

$$\frac{CB}{CA} = \frac{p(p-1)}{2} \frac{r^2}{\frac{r'^2}{\sin^2 \alpha}}.$$

Soit  $l$  la longueur du segment de la tangente compris entre son point de contact  $A$  et son point de ren-

contre T avec PQ, on a

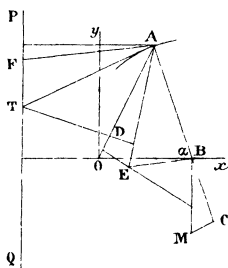
$$\frac{r'^2}{\sin^2 \alpha} = l^2,$$

par suite

$$\frac{CB}{CA} = \frac{p(p-1)}{2} \frac{r^2}{l^2}.$$

Cette relation conduit à la construction suivante :

Prendre sur AO le segment  $AD = \sqrt{\frac{p(p-1)}{2}} r$ ;  
joindre TD, mener du point A la droite AE perpendi-  
culaire à TD jusqu'en E, où elle rencontre la droite BE



parallèle à AF. Cette dernière est symétrique de AE par rapport à la bissectrice de l'angle OAT. La perpendiculaire à AO menée du point E rencontre la normale AB au centre de courbure C.

En effet, les triangles CBE, CEA sont tous deux semblables au triangle ADT.

Il en résulte les proportions

$$\frac{CB}{CE} = \frac{CE}{CA} = \frac{AD}{AT};$$

d'où

$$\frac{CB}{CA} = \frac{AD^2}{AT^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{CB}{CA} = \frac{p(p-1)}{2} \frac{r^2}{l^2}.$$

Cette construction est la généralisation d'une construction bien connue du centre de courbure des sections coniques.