Nouvelles annales de mathématiques

E. Carvallo

Théorèmes de mécanique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 65-72
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__65_0>

THÉORÈMES DE MÉCANIQUE;

PAR M. E. CARVALLO,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

1. Le succès d'un tout petit article, que j'ai publié dans ce Recueil [1] *Sur une généralisation du théorème des projections,* m'encourage à indiquer quelques autres théorèmes, dont la nature semble *a priori* très différente, mais qui ont réellement, entre eux et avec celui que je rappelle, une parenté très étroite. Ils peuvent être, comme lui, représentés symboliquement par la règle de multiplication des polynômes algébriques. Quelques-uns d'entre eux prennent aujourd'hui de l'importance par le fait de l'introduction de la Mécanique dans le programme d'admission à l'École Polytechnique.

2. THÉORÈME I. — *Soient un système de l points* A_1, A_2, ..., A_l, *et un système de m points* B_1, B_2, ..., B_m. *On joint un point* A_λ *du premier système à un point* B_μ *du second, et l'on imagine la force représentée par le segment* $A_\lambda B_\mu$. *Si l'on considère le système des lm forces obtenues en joignant ainsi chaque point du premier système à chaque point du second, ce système de forces admet une résultante unique, représentée par lm fois la droite qui va du barycentre* A *du premier système de points au barycentre* B *du second.*

Ce théorème peut être représenté symboliquement

[1] 3e série, t. X, août 1891.

par la formule d'Algèbre

$$\Sigma[A_\lambda B_\mu] = [(A_1 + A_2 + \ldots + A_l)(B_1 + B_2 + \ldots + B_m)]$$
$$= lm[AB].$$

C'est la même qui nous a servi à représenter le théorème des projections rappelé au début. Seule la signification des symboles est changée; $[AB]$ représente la force qui va du point A au point B; $(A_1 + A_2 + \ldots + A_l)$, par exemple, représente le barycentre A avec la masse l (ou tout autre système de points ayant même barycentre et même masse totale). Le signe $=$ signifie que les deux systèmes de forces, représentés par les deux membres et supposés appliqués à un corps solide, sont équivalents.

3. Le théorème peut être généralisé en appliquant un poids à chaque point. Le lecteur devinera la généralisation sur la formule. Une règle bien connue résulte du théorème général, dans le cas où l'un des systèmes de points se réduit à un seul point donné B.

Le *théorème de Leibnitz* est une conséquence de cette règle. On l'obtient en faisant coïncider ce point unique donné B avec le barycentre A de l'autre système de points donnés. Le *système des forces obtenues est alors en équilibre*. On obtient des énoncés spéciaux intéressants, en considérant les cas singuliers où la masse totale de l'un des systèmes, ou de chacun d'eux à la fois, est nulle. Je laisse de côté ces énoncés et aussi les démonstrations, car mon but est d'être bref, pour ne pas disperser l'attention du lecteur, mais la concentrer sur le point fondamental qui est le *rapprochement des énoncés*.

4. Théorème II. — *On donne un système de points* A_1, A_2, ..., *de masses* m_1, m_2, ... *et un système de vec-*

teurs I_1, I_2, ... *A l'un quelconque des points donnés* A_λ, *on applique une force représentée par l'un quelconque des vecteurs donnés* I_μ *multiplié par la masse* m_λ *du point* A_λ. *Le système des forces ainsi obtenues, en combinant tous les points donnés avec tous les vecteurs donnés, a une résultante unique. Celle-ci est appliquée au barycentre* A *des points donnés. Elle est représentée par la résultante* I *des vecteurs donnés multipliée par la masse totale* m *des points donnés.*

Ce théorème est représenté, comme le précédent, par la formule

$$\Sigma m_\lambda[A_\lambda I_\mu] = [(m_1 A_1 + m_2 A_2 + \ldots)(I_1 + I_2 + \ldots)] = m[AI].$$

Le lecteur devinera la signification des symboles.

5. Dans le cas particulier où l'on donne un seul vecteur I, le théorème fournit *la règle bien connue pour la composition des forces parallèles*. Cette règle apparaît ici comme un cas limite de celle qui conduit au théorème de Leibnitz (3). Il suffit d'imaginer que le point unique B du n° 3 s'éloigne à l'infini dans la direction du vecteur I.

Si l'on suppose que non seulement les points de l'un des systèmes, mais aussi ceux de l'autre, s'éloignent à l'infini, on obtient, au lieu du théorème II, le suivant :

6. Théorème III. — *On donne deux systèmes de vecteurs* I_1, I_2, ... *et* J_1, J_2, ... *On prend un vecteur* I_λ *du premier système et un vecteur* J_μ *du second, puis le couple* $[I_\lambda J_\mu]$ *qui a pour moment l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs, et dont le plan est parallèle à celui de ce parallélogramme. Si l'on considère le système des couples ainsi formés, en com-*

binant tous les vecteurs du premier système avec tous ceux du second, ce système de couples, supposé appliqué à un corps solide, peut être remplacé par le couple [IJ] *obtenu au moyen des résultantes* I *et* J *des deux systèmes de vecteurs donnés.*

Voilà un théorème qui, par son énoncé, semble bien éloigné des théorèmes I et II. Il n'en est cependant qu'un cas limite. Il est représenté, comme eux, par la formule

$$\Sigma[I_\lambda J_\mu] = [(I_1 + I_2 + \ldots)(J_1 + J_2 + \ldots)] = [IJ].$$

Inutile d'insister sur la signification des symboles, ni sur les cas spéciaux qui peuvent se présenter dans l'application des théorèmes II et III.

7. On peut former de la même manière les énoncés de théorèmes où figurent trois, puis quatre systèmes de points ou vecteurs donnés. Je citerai seulement les derniers de ces séries.

Théorème IV. — *On donne un système de* l, m, n *et* p *points* $A_1, A_2, \ldots, A_l$; $B_1, B_2, \ldots, B_m$; $C_1, C_2, \ldots, C_n$; $D_1, D_2, \ldots, D_p$. *Si l'on considère tous les tétraèdres qu'on peut former en prenant les quatre sommets respectivement dans chacun des quatre systèmes, leur somme algébrique est égale au tétraèdre* [ABCD], *qui a pour sommets les barycentres des quatre systèmes, multiplié par le produit* $lmnp$.

Théorème V. — *On donne trois systèmes de vecteurs* $I_1, I_2, \ldots$; $J_1, J_2, \ldots$; $K_1, K_2, \ldots$. *Si l'on considère tous les tétraèdres qu'on peut construire en prenant pour les trois arêtes successives du sommet, respectivement trois vecteurs pris dans chacun des systèmes, la somme algébrique de tous ces tétraèdres est égale au* *tétraèdre* $[IJK]$ *formé avec les résultantes des trois systèmes de vecteurs donnés.*

Ces théorèmes sont encore représentés par la règle de multiplication des polynômes, savoir

$$\begin{aligned}
&\Sigma[A_\lambda B_\mu C_\nu D_\varpi] \\
&\quad = [\ (A_1 + A_2 + \ldots + A_l)(B_1 + B_2 + \ldots + B_m) \\
&\qquad \times (C_1 + C_2 + \ldots + C_n)(D_1 + D_2 + \ldots + D_p)] \\
&\quad = lmnp[ABCD],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Sigma[I_\lambda J_\mu K_\nu] \\
&\quad = [(I_1 + I_2 + \ldots)(J_1 + J_2 + \ldots)(K_1 + K_2 + \ldots)] = [IJK].
\end{aligned}$$

Je n'insiste pas sur la signification des symboles. On la devine, et j'ai hâte de revenir à des théorèmes connus, ce qui paraîtra sans doute plus intéressant.

8. Théorème VI. — *On considère deux systèmes de forces* $p_1, p_2, \ldots$ *et* $q_1, q_2, \ldots$, *appliqués à un corps solide. Si l'on construit tous les tétraèdres possibles, en prenant pour première arête une force du premier système et pour arête opposée une force du second, la somme algébrique de ces tétraèdres est* CONSTANTE, *quel que soit le système qu'on choisisse parmi ceux qui sont équivalents au système des forces* p, *et quel que soit le système qu'on choisisse parmi ceux qui sont équivalents au système des forces* q.

Ce théorème est, comme tous les précédents, représenté par la formule de multiplication des polynômes algébriques

$$\begin{aligned}
\Sigma[p_\lambda q_\mu] &= [(p_1 + p_2 + \ldots)(q_1 + q_2 + \ldots)] \\
&= [(p'_1 + p'_2 + \ldots)(q'_1 + q'_2 + \ldots)] = \Sigma[p'_\lambda q'_\mu].
\end{aligned}$$

Dans cette formule, $[p_\lambda q_\mu]$ représente la valeur algébrique du tétraèdre, dont la première arête est p_λ et dont l'arête opposée est q_μ; $(p_1 + p_2 + \ldots)$ représente non pas la somme des valeurs numériques de ces forces, mais la notion géométrique plus complexe de l'ensemble de ces forces. Le théorème montre que, comme en Algèbre, on peut remplacer $(p_1 + p_2 + \ldots)$ par *toute somme égale*, ce qui signifie ici par *tout système de forces équivalent au premier*.

9. Le *théorème de Möbius* en est un cas particulier. On l'obtient en prenant le système des forces q confondu avec celui des forces p. Pour avoir ensuite le théorème de *Chasles*, il suffit de réduire à deux le système des forces p. Dans le cas particulier où le système des forces est en équilibre ou réductible à une force unique, ou seulement à un couple (ce qui est un cas limite d'une force unique), la constante du théorème de Möbius est nulle.

10. On pourra former, comme on l'a fait, avec des systèmes renfermant seulement des points ou vecteurs, des théorèmes où figurent à la fois des systèmes de points ou vecteurs, et aussi des systèmes de forces ou de couples. On peut s'élever dans une voie illimitée, en prenant un nombre aussi grand qu'on voudra de systèmes.

11. D'un autre côté, nous avons seulement introduit des systèmes de points et de forces et leurs cas limites vecteurs et couples. On peut aussi introduire des systèmes de plans. A cet égard, chacun des théorèmes que nous avons signalés admet un théorème corrélatif où les points sont remplacés par des plans et inversement. Ce théorème corrélatif peut, il est vrai, coïncider avec un théorème déjà étudié. C'est ainsi que le théorème VI a, pour corrélatif, lui-même. Mais il

reste encore là une source abondante de théorèmes nouveaux.

12. Et maintenant, cher lecteur, entreprendrez-vous de chercher une démonstration spéciale pour chacun de tous ces théorèmes, dont l'abondance décourage même de fixer les énoncés? Vous estimerez plutôt que, malgré leur apparente diversité, tous ces théorèmes, y compris celui des projections, découlent d'un même principe. Ce principe est celui que j'ai pris pour base dans mon exposition de *la méthode de Grassmann* (¹).

Le présent article a pour but de montrer deux choses, d'abord que cette méthode a son origine dans la Statique, qu'ensuite elle résume à son tour la Statique tout entière en un instrument condensé et puissant, d'un maniement souvent aussi facile que celui de l'Algèbre élémentaire, dont elle suit les règles. Dans ces règles sont renfermés tous les théorèmes connus de Statique et une infinité d'autres; il devient inutile de les savoir et même de les énoncer. La connaissance du calcul algébrique les remplace.

J'ai montré, d'autre part, le parti qu'on peut tirer de la méthode de Grassmann pour la théorie des déterminants (²). Mais, si je l'ai fait, c'est pour faire voir le lien qui existe entre elles. La vérité est que la méthode de Grassmann supprime la théorie des déterminants, en se substituant à elle.

Voilà pour la Mécanique et l'Algèbre. Quant à la Géométrie, elle l'embrasse tout entière dans son algorithme, à la fois synthétique et analytique, qui se prête aussi bien à la Géométrie de position qu'à la Géométrie

---

(¹) *Nouvelles Annales,* 3ᵉ série, t. XI; 1892.

(²) *Nouvelles Annales,* 3ᵉ série, t. X; mai et août 1891.

métrique. M. F. Caspary l'a démontré dans ses importants Mémoires ([1]), et je l'ai seulement indiqué dans mon article trop court sur *la méthode de Grassmann*. Je me propose, pour le faire voir plus complètement, de traiter bientôt quelques exemples puisés dans les matières du cours de Mathématiques spéciales.