

AUDIBERT

**Concours d'admission à l'École centrale
en 1893 (deuxième session). Solution de la
question de géométrie analytique**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 12
(1893), p. 520-522

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__520_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1893
(DEUXIÈME SESSION).
SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE (1);

PAR M. AUDIBERT.

1° Les deux droites

$$(1) \quad \lambda(y-b)^2 + (x-a)^2 = 0,$$

de direction $\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}$ et $\frac{-1}{\sqrt{-\lambda}}$, se coupant au point fixe (a, b) centre commun aux coniques Δ , on aura, pour déterminer les coefficients des coniques tangentes à l'axe des x ,

$$x^2 + 2mxy + 2Dx + 2Ey - D^2 = 0,$$

les relations

$$C = -\lambda,$$

$$a + mb + D = 0,$$

$$ma - \lambda b + E = 0;$$

d'où résultera l'équation

$$(\Delta) \quad \begin{cases} x^2 + 2mxy - \lambda y^2 - 2(a + mb)x \\ \quad - 2(ma - \lambda b)y + (a + mb)^2 = 0. \end{cases}$$

On voit qu'elle est du second degré en m ; on en conclut que par chaque point (x, y) du plan passent deux coniques Δ réelles ou imaginaires.

2° En particulier, pour celles passant par le point $(0, q)$, les deux paramètres m' et m'' seront racines de

$$b^2 m^2 - 2a(q-b)m + a^2 - \lambda q(q-2b) = 0.$$

(1) Voir l'énoncé p. 352.

On en tire

$$(2) \quad m' + m'' = \frac{2a(q-b)}{b^2}, \quad m'm'' = \frac{a^2 - \lambda q(q-2b)}{b^2}.$$

Les polaires de l'origine relatives à ces deux coniques ont respectivement pour équations

$$2(a + m'b)x + 2(m'a - \lambda b)y - (a + m'b)^2 = 0,$$

$$2(a + m''b)x + 2(m''a - \lambda b)y - (a + m''b)^2 = 0.$$

En les combinant avec (2), on éliminera m' et m'' , et, pour déterminer les coordonnées du point de rencontre de ces deux polaires, on aura les égalités

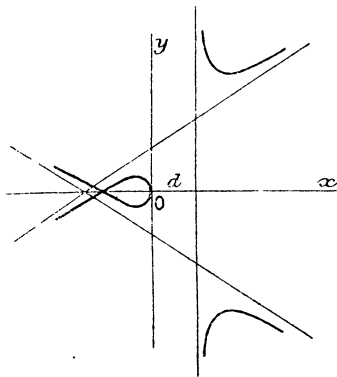
$$bx + ay = q,$$

$$2ax - a\lambda by = \lambda q(q - 2b).$$

Le lieu de ces points, quand on fait varier q , est la parabole

$$(P) \quad \lambda(bx + ay)^2 - 2ax(a^2 + \lambda b^2) = 0.$$

Quelle que soit la valeur de λ , les courbes P touche-



ront l'axe des y à l'origine, leurs diamètres auront la direction fixe $\frac{-b}{a}$, et celui d'entre eux qui est conjugué à cet axe demeure invariable.

3° Cherchons le lieu des points de contact avec (P) des tangentes de direction $\frac{a}{\lambda b}$, λ étant fixe, a et b variables, mais liés par la relation

$$a = pb^2.$$

Soient x et y les coordonnées d'un de ces points, on aura

$$-\frac{\lambda(bx + ay)b - a(a^2 + \lambda b^2)}{\lambda(bx + ay)a} = \frac{a}{\lambda b}.$$

L'élimination de a et de b entre les trois relations qui précèdent donne

$$y = \pm \frac{\lambda + 2px}{\sqrt{2\lambda p}} \sqrt{\frac{x}{\lambda - 2px}}$$

et, en posant

$$\lambda = 2pd, \\ y = \pm \frac{d+x}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{x}{d-x}}.$$

Rappelons que les droites (1) ne sont réelles qu'à la condition que λ soit négatif et faisons $\lambda = -\lambda_1$, l'équation

$$y = \pm \frac{d+x}{\sqrt{\lambda_1}} \sqrt{\frac{x}{x-d}}$$

représentera la courbe cherchée.

Elle a un nœud au point $y = 0$, $x = -d$, et possède trois asymptotes

$$x = d, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \left(x + \frac{3}{2}d \right).$$

NOTA. — Solution analogue par M. J. Sala.