H. Ader

Sur les congruences de droites et la courbure des surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 12 (1893), p. 484-489
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__484_1>

SUR LES CONGRUENCES DE DROITES ET LA COURBURE DES SURFACES;

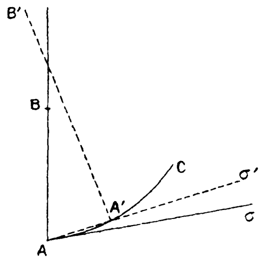
PAR M. H. ADER,
Élève-ingénieur des Ponts et Chaussées.

Si l'on considère une génératrice G d'une congruence de droites, on sait que toutes les surfaces passant par G et dont les génératrices appartiennent à la congruence sont tangentes en deux points de G et que parmi ces surfaces il n'y en a que deux qui sont développables. Ce résultat est, en particulier, démontré dans le *Traité de Géométrie descriptive* de M. Mannheim par des considérations fondées sur la théorie générale des déplacements infiniment petits d'un corps solide dans l'espace.

Proposons-nous d'abord d'en donner une démonstration directe.

Supposons que la droite G se déplace sans cesser de faire partie de la congruence; chacun de ses points décrira une surface trajectoire, qui, en général, ne sera pas tangente à G; il ne peut y avoir, en effet, plus de deux points sur G, tels que cette droite soit tangente à leur surface trajectoire, car, s'il y en avait davantage, toutes les surfaces appartenant à la congruence et passant par G seraient de raccordement tout le long de cette génératrice. Prenons donc deux points quelconques A et B dont les surfaces trajectoires S et T ne soient pas

Fig. 1.



tangentes à G. Pour définir une surface de la congruence, il suffira de donner sa trace sur S ou T. Je dis que, si l'on se donne le plan tangent à l'une des surfaces, à l'un des points A ou B, dont les surfaces trajectoires S et T ne sont pas tangentes à G, cela suffira pour déterminer le plan tangent en un point quelconque de la génératrice. Je vais démontrer pour cela que, si l'on considère sur S une directrice C tangente à la droite $A\sigma$, la surface correspondante est de raccordement avec celle qui a pour directrice la section de S par le plan $BA\sigma$.

Je considère la section par le plan $BA\sigma'$ voisin de $BA\sigma$. La surface qui a pour directrice cette section a deux génératrices communes AB, A′B′, avec celle qui a pour directrice C. Si je suppose que BAσ' se rapproche indéfiniment de BAσ, je vois qu'à la limite les deux surfaces ayant pour directrices la courbe C et la section BAσ ont deux génératrices infiniment voisines communes, et se raccordent par suite le long de AB. Les plans tangents en A et B aux surfaces de la congruence se correspondent donc homographiqûement, et aux plans doubles de ces deux faisceaux correspondent deux surfaces qui ont même plan tangent en A et B et sont, par suite, développables.

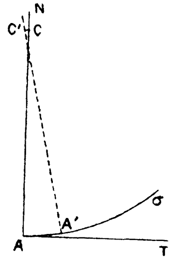
Soient F_1 et F_2 les points où G touche les arêtes de rebroussement de ces deux surfaces; ce sont les foyers relatifs à la génératrice G. Le lieu de ces foyers est formé de deux surfaces S_1 et S_2 (ou plutôt de deux nappes d'une même surface) qu'on appelle *surfaces focales de la congruence.* Il est évident que les arêtes de rebroussement A_1 et A_2 des deux surfaces développables font partie de S_1 et S_2 et que, par suite, la droite G qui est tangente aux deux courbes A_1 et A_2 est aussi tangente aux deux surfaces focales. Toutes les surfaces de la congruence passant par G admettent comme plan tangent en F_1 et F_2 les plans tangents en ces mêmes points à S_1 et S_2. C. Q. F. D.

Considérons maintenant les points représentatifs des surfaces de la congruence passant par G. Le lieu de ces points est le segment décrit sur F_1F_2, et capable de l'angle que font les plans tangents communs à toutes les surfaces en F_1 et F_2.

Nous allons maintenant nous proposer de voir ce qui arrive, lorsque les droites de la congruence sont normales à une même surface S.

Les surfaces réglées formées de droites faisant partie de la congruence sont alors appelées des *normalies*. Je remarque d'abord que si je considère une normalie ayant pour directrice une section normale NAT, la normale à

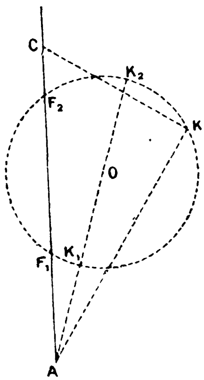
Fig. 2.



la surface au point A', voisin de A, se projette sur le plan NAT, suivant la normale à la courbe $A\sigma$; si je coupe alors la normalie par le plan horizontal du point C, centre de courbure de la courbe $A\sigma$, la courbe d'intersection a pour tangente la limite de CC' qui est une perpendiculaire au plan NAT. Le plan tangent à la normalie au centre de courbure C de la section NAT est donc perpendiculaire au plan NAT.

Si donc je considère une normalie ayant pour directrice une section normale quelconque, pour avoir le centre de courbure C de cette section, il suffira de mener par le point représentatif K de cette normalie une perpendiculaire KC à la droite AK. On voit alors par la seule inspection de la figure que, lorsque le point représentatif se déplace sur le cercle de centre O, il y a deux positions de ce point, K_1 et K_2, pour lesquelles le rayon de courbure est maximum et minimum, c'est-à-dire qu'il existe deux sections normales de courbure maxima et minima. On voit d'ailleurs immédiatement que ces deux sections font avec le plan tangent commun à toutes les normalies en F_1 des angles complémentaires, c'est-à-dire qu'elles sont rectangulaires.

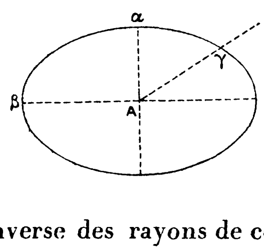
Fig. 3.



Je vais maintenant démontrer que les plans tangents communs en F_1 et F_2 à toutes les normalies sont précisément les deux sections rectangulaires de courbure maxima et minima; pour cela je coupe la surface par un plan infiniment voisin du plan tangent en A.

Les carrés des rayons $A\gamma$ de la courbe d'intersection

Fig. 4.

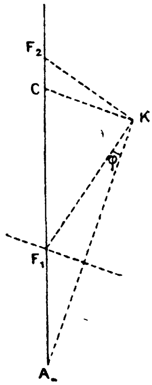


sont en raison inverse des rayons de courbure des sections normales correspondantes.

Aux sections de courbure maxima et minima $A\alpha$ et $A\beta$ correspondent donc un rayon minimum $A\alpha$ et un rayon maximum Aβ. On en déduit que les normales à la surface en α et β rencontrent la normale en A, c'est-à-dire que les normalies correspondantes sont développables.

Cela étant, on peut alors établir immédiatement la

Fig. 5.



relation d'Euler. Il suffit pour cela de mener par le point F_1 une perpendiculaire à AK et d'écrire l'égalité entre les rapports anharmoniques que détermine sur cette droite et sur AF_1 le faisceau $K.AF_1CF_2$,

$$\frac{\dfrac{\tang\varphi}{\cot\varphi}}{1} = \frac{\dfrac{R_1}{R_2}}{\dfrac{R - R_1}{R_2 - R}},$$

d'où l'on déduit, par une suite de transformations très simples,

$$\frac{\sin^2\varphi}{R_1} + \frac{\cos^2\varphi}{R_2} = \frac{1}{R}.$$