

MAURICE D'OCAGNE

Problème d'algèbre relatif à la nomographie

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 12
(1893), p. 469-476

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__469_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME D'ALGÈBRE RELATIF A LA NOMOGRAPHIE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
 Répétiteur à l'École Polytechnique.

1. Je rappelle en deux mots le principe de la méthode de représentation de certaines équations à trois variables au moyen des *points isoplèthes*, qui se trouve développée dans le Chapitre IV de ma *Nomographie* ⁽¹⁾.

Considérons trois systèmes de points dépendant chacun d'un paramètre arbitraire et définis par les formules

$$\begin{aligned} x &= f_1(x_1), & x &= f_2(x_2), & x &= f_3(x_3), \\ y &= \varphi_1(x_1), & y &= \varphi_2(x_2), & y &= \varphi_3(x_3). \end{aligned}$$

Leur ensemble, si l'on suppose chacun de ces points coté au moyen de la valeur du paramètre correspondant, constitue un abaque de l'équation en x_1, x_2, x_3 , qui exprime l'alignement de trois de ces points.

Les applications de cette méthode sont des plus fréquentes dans la pratique.

Il est intéressant de reconnaître la forme des équations représentées par les plus simples de ces abaques, ceux dans lesquels chaque système de points isoplèthes est constitué par des points cotés, régulièrement espacés sur une droite, c'est-à-dire tels que leurs distances respectives soient proportionnelles à la différence de leurs cotes.

Dans ce cas, les formules ci-dessus doivent évidem-

(1) *Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques*. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891.

ment prendre la forme

$$\begin{aligned} x &= m_1 x_1 + n_1, & x &= m_2 x_2 + n_2, & x &= m_3 x_3 + n_3, \\ y &= p_1 x_1 + q_1, & y &= p_2 x_2 + q_2, & y &= p_3 x_3 + q_3. \end{aligned}$$

L'équation représentée peut dès lors s'écrire

$$\begin{vmatrix} m_1 x_1 + n_1 & p_1 x_1 + q_1 & 1 \\ m_2 x_2 + n_2 & p_2 x_2 + q_2 & 1 \\ m_3 x_3 + n_3 & p_3 x_3 + q_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, sous forme développée,

$$(a) \quad A_1 x_2 x_3 + A_2 x_3 x_1 + A_3 x_1 x_2 + B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 + C = 0,$$

les coefficients de cette équation étant donnés par les formules

$$A_1 = m_2 p_3 - m_3 p_2,$$

$$A_2 = m_3 p_1 - m_1 p_3,$$

$$A_3 = m_1 p_2 - m_2 p_1,$$

$$B_1 = m_1(q_2 - q_3) - p_1(n_2 - n_3),$$

$$B_2 = m_2(q_3 - q_1) - p_2(n_3 - n_1),$$

$$B_3 = m_3(q_1 - q_2) - p_3(n_1 - n_2),$$

$$C = n_1 q_2 - n_2 q_1 + n_2 q_3 - n_3 q_2 + n_3 q_1 - n_1 q_3.$$

Réciproquement, toute équation de la forme (a) est-elle représentable par trois systèmes *réguliers* de points isoplèthes? En d'autres termes, $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ et C étant donnés, peut-on toujours trouver un système de valeurs *réelles* de $m_1, n_1, m_2, n_2, m_3, n_3, p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3$ satisfaisant aux équations (I)? Tel est le problème d'Algèbre qui va être ici examiné.

2. Remarquons tout d'abord que, si l'équation (a) est représentable par trois systèmes réguliers de points isoplèthes, on peut toujours faire coïncider l'axe des y avec la droite sur laquelle est disposé l'un de ceux-ci en

plaçant l'origine au point coté 0. On n'enlève donc rien à la généralité du problème traité en prenant

$$m_1 = 0, \quad n_1 = 0, \quad p_1 = 1, \quad q_1 = 0.$$

Le système précédent devient alors

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad A_1 = m_2 p_3 - m_3 p_2, \\ (2) \quad A_2 = m_3, \\ (3) \quad A_3 = -m_2, \\ (4) \quad B_1 = n_3 - n_2, \\ (5) \quad B_2 = m_2 q_3 - p_2 n_3, \\ (6) \quad B_3 = n_2 p_3 - q_2 m_3, \\ (7) \quad C = n_2 q_3 - n_3 q_2. \end{array} \right.$$

L'élimination de m_2 et m_3 entre (1), (2) et (3) donne

$$(8) \quad A_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 = 0,$$

équation incompatible avec l'hypothèse où deux des coefficients A_1 , A_2 et A_3 seraient nuls à l'exclusion du troisième (1).

Il n'y a, par suite, à envisager que les trois hypothèses suivantes :

1° Les trois coefficients A_1 , A_2 , A_3 sont différents de zéro, ce que nous écrirons

$$A_1 \neq 0, \quad A_2 \neq 0, \quad A_3 \neq 0.$$

2° Un seul d'entre eux est nul. Un choix convenable de notations permet toujours d'écrire cette hypothèse

$$A_1 = 0, \quad A_2 \neq 0, \quad A_3 \neq 0.$$

(1) Il résulte, en particulier, de là que l'équation $\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 = 0$, qui traduit la multiplication, n'est pas représentable par trois systèmes réguliers de points isoplèthes, mais elle est représentable par trois systèmes rectilignes dont deux réguliers, savoir :

$$\begin{array}{lll} x = 1, & x = -1, & x = \frac{1 + \alpha_1}{1 - \alpha_1}, \\ y = \alpha_1, & y = \alpha_2, & y = 0. \end{array}$$

(472)

3° Ils sont nuls tous les trois,

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0.$$

3. *Premier cas.* — $A_1 \neq 0, A_2 \neq 0, A_3 \neq 0.$

Les équations (2) et (3) donnent

$$m_2 = -A_3, \quad m_3 = A_2,$$

et le système (I) se réduit à

$$(I') \quad \begin{cases} (1') & A_1 = -A_2 p_2 - A_3 p_3, \\ (4') & B_1 = n_3 - n_2, \\ (5') & B_2 = -A_3 q_3 - p_2 n_3, \\ (6') & B_3 = n_2 p_3 - A_2 q_2, \\ (7') & C = n_2 q_3 - n_3 q_2. \end{cases}$$

Entre ces cinq équations éliminons $q_2, n_3, p_3, q_3.$

De (1') et (4') nous tirons d'abord

$$p_3 = -\frac{A_1 + A_2 p_2}{A_3}, \quad n_3 = B_1 + n_2.$$

Portant ces valeurs de n_3 et de p_3 respectivement dans (5') et (6'), on tire de celles-ci

$$q_3 = -\frac{B_2 + p_2(B_1 + n_2)}{A_3}, \quad q_2 = -\frac{1}{A_2} \left(B_3 + n_2 \frac{A_1 + A_2 p_2}{A_3} \right).$$

L'équation (7') devient alors

$$C = -n_2 \frac{B_3 + p_2(B_1 + n_2)}{A_3} + \frac{B_1 + n_2}{A_2} \left(B_3 + n_2 \frac{A_1 + A_2 p_2}{A_3} \right),$$

ou, toutes réductions faites,

$$(9) \quad A_1 n_2^2 + (A_1 B_1 - A_2 B_2 + A_3 B_3) n_2 + A_3 (B_1 B_3 - A_2 C) = 0.$$

Le paramètre p_2 ayant disparu de lui-même dans cette élimination, on voit qu'on peut lui attribuer une valeur quelconque. En vue de la plus grande simplicité, nous prendrons naturellement

$$p_2 = 0.$$

L'équation (9) détermine n_2 . Ce paramètre devant être réel, le problème ne sera possible qu'autant que l'on aura

$$(A_1 B_1 - A_2 B_2 + A_3 B_3)^2 - 4 A_1 A_3 (B_1 B_3 - A_2 C) \geq 0$$

ou

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} A_1^2 B_1^2 + A_2^2 B_2^2 + A_3^2 B_3^2 - 2 A_1 A_2 B_1 B_2 - 2 A_2 A_3 B_2 B_3 \\ \quad - 2 A_3 A_1 B_3 B_1 + 4 A_1 A_2 A_3 C \geq 0. \end{array} \right.$$

Si cette inégalité est satisfaite, l'équation (9) donne pour n_2 deux valeurs ν et ν' . Adoptant l'une d'entre elles, ν par exemple, on a pour q_2, n_3, p_3, q_3 les valeurs

$$q_2 = -\frac{1}{A_2} \left(B_3 + \nu \frac{A_1}{A_3} \right), \quad n_3 = B_1 + \nu,$$

$$p_3 = -\frac{A_1}{A_3}, \quad q_3 = -\frac{B_2}{A_3}.$$

4. *Deuxième cas.* — $A_1 = 0, A_2 \neq 0, A_3 \neq 0$.

Le seul changement à ce qui précède tient à ce qu'ici l'équation (9), se réduisant à

$$(A_3 B_3 - A_2 B_2) n_2 + A_3 (B_1 B_3 - A_2 C) = 0,$$

fournit pour n_2 une valeur toujours satisfaisante, savoir

$$n_2 = A_3 \frac{B_1 B_3 - A_2 C}{A_2 B_2 - A_3 B_3}.$$

Dès lors, les formules qui terminent le numéro précédent deviennent

$$q_2 = -\frac{B_3}{A_2}, \quad n_3 = A_2 \frac{B_1 B_3 - A_3 C}{A_2 B_2 - A_3 B_3},$$

$$p_3 = 0, \quad q_3 = -\frac{B_2}{A_3}.$$

Rappelons, d'ailleurs, qu'on a toujours

$$m_1 = -A_1, \quad m_2 = A_2, \quad p_2 = 0.$$

On voit, en outre, que n_2 et n_3 devenant infinis lorsque $A_2 B_2 - A_3 B_3 = 0$, la solution est, dans ce cas, illusoire. Il convient donc de compléter l'hypothèse faite par la condition

$$A_2 B_2 - A_3 B_3 \neq 0.$$

5. *Troisième cas.* — $A_1 = A_2 = A_3 = 0$.

Le système (I') se réduit à

$$(I'') \quad \begin{cases} (4'') & B_1 = n_3 - n_2, \\ (5'') & B_2 = -n_3 p_2, \\ (6'') & B_3 = n_2 p_3, \\ (7'') & C = n_2 q_3 - n_3 q_2. \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, nous nous donnerons les valeurs de deux des six inconnues; mais ici, pas plus que précédemment, le choix n'est absolument arbitraire.

Ainsi les équations (5'') et (6'') montrent qu'on ne peut annuler aucune des qualités n_2, p_2, n_3, p_3 , car B_2 et B_3 sont nécessairement différents de 0; dans le cas contraire, en effet, une des variables α_2 ou α_3 cesserait de figurer dans l'équation (1), les coefficients des rectangles étant déjà supposés nuls.

De même, l'équation (7'') montre qu'on ne saurait généralement pas se donner à la fois $q_2 = q_3 = 0, \dots$

Une hypothèse, toujours admissible, consiste à prendre

$$p_3 = 1, \quad q_2 = 0.$$

Le système (I'') devient alors

$$\begin{aligned} B_1 &= n_3 - n_2, \\ B_2 &= -n_3, \\ B_3 &= n_2 p_3, \\ C &= n_2 q_3, \end{aligned}$$

d'où l'on tire successivement

$$\begin{aligned} n_3 &= -B_2, \\ n_2 &= -(B_1 + B_2), \\ p_3 &= -\frac{B_1}{B_1 + B_2}, \\ q_3 &= -\frac{C}{B_1 + B_2}. \end{aligned}$$

6. *Résumé.* — Pour revenir au problème d'où nous sommes parti, nous pourrions résumer ce qui précède ainsi qu'il suit :

Une équation de la forme (a) est représentable par trois systèmes réguliers de points isoplèthes, et cela d'une infinité de façons, dans les trois cas qui suivent, pour chacun desquels nous donnons le mode de représentation le plus simple :

Premier cas. — $A_1 \neq 0, A_2 \neq 0, A_3 \neq 0,$

$$\begin{aligned} A_1^2 B_1^2 + A_2^2 B_2^2 + A_3^2 B_3^2 - 2 A_1 A_2 B_1 B_2 - 2 A_2 A_3 B_2 B_3 \\ - 2 A_3 A_1 B_3 B_1 + 4 A_1 A_2 A_3 C \geq 0. \end{aligned}$$

Formules de la représentation :

$$\begin{aligned} x = 0, \quad x &= -A_2 z_2 + v, \quad x = -\frac{A_1 B_1 + v A_1}{A_2 A_3}, \\ y = z_1, \quad y &= A_2 z_3 + B_3 + v, \quad y = -\frac{A_1 z_3 + B_2}{A_3}. \end{aligned}$$

v étant racine de l'équation

$$A_1 v^2 + (A_1 B_1 - A_2 B_2 + A_3 B_3)v + A_3(B_1 B_3 - A_2 C) = 0.$$

Deuxième cas. —

$$A_1 = 0, \quad A_2 \neq 0, \quad A_3 \neq 0, \quad A_2 B_2 - A_3 B_3 \neq 0.$$

Formules de la représentation :

$$\begin{aligned} x = 0, \quad x &= -A_3 x_2 + A_3 \frac{B_1 B_3 - A_3 C}{A_2 B_2 - A_3 B_3}, \quad x = A_2 x_3 + A_2 \frac{B_1 B_2 - A_3 C}{A_2 B_2 - A_3 B_3}, \\ y = x_1, \quad y &= -\frac{B_3}{A_2}, \quad y = -\frac{B_3}{A_3}. \end{aligned}$$

On voit que dans ce cas les systèmes α_2 et α_3 sont disposés sur des droites parallèles.

Troisième cas. — $A_1 = A_2 = A_3 = 0$.

Formules de la représentation :

$$\begin{aligned} x = 0, \quad x &= -(B_1 + B_2), \quad x = -B_2, \\ y = x_1, \quad y &= x_2, \quad y = -\frac{B_3 x_3 + C}{B_1 + B_2}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, les trois systèmes (α_1) , (α_2) , (α_3) sont disposés sur des droites parallèles.