

BALITRAND

Construction du cercle osculateur en un point d'une hyperbole

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 12
(1893), p. 451-453

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__451_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTION DU CERCLE OSCULATEUR EN UN POINT D'UNE HYPERBOLE;

PAR M. BALITRAND,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Soit

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F \\ \qquad \qquad \qquad \equiv \varphi(x, y) + 2Dx + 2Ey + F = 0 \end{array} \right.$$

l'équation d'une hyperbole Σ . Nous nous proposons de construire le cercle osculateur en un point M de cette hyperbole. Désignons par P et P₁ les premiers membres des équations de la tangente au point M et d'une autre droite passant par ce point. L'équation du cercle osculateur sera de la forme

$$(2) \quad S = \varphi(x, y) + 2Dx + 2Ey + F + PP_1 = 0$$

On en déduit

$$(3) \quad S - 2Dx - 2Ey - F \equiv \varphi(x, y) + PP_1.$$

Or le premier membre de cette identité représente un cercle, le second représente aussi un cercle et celui-ci se détermine facilement, puisqu'il passe par les quatre points d'intersection des droites qui ont pour équation

$$(4) \quad \varphi(x, y) = 0, \quad P = 0, \quad P_1 = 0.$$

La droite P_1 est partiellement inconnue, mais sa détermination s'achève précisément par ce fait, que, puisque les points d'intersection des droites (4) sont sur un cercle, les droites P et P_1 sont antiparallèles par rapport aux directions asymptotiques de l'hyperbole Σ .

Nous pouvons donc construire le cercle qui a pour équation

$$(5) \quad S - 2Dx - 2Ey - F = 0.$$

Mais ce cercle et le cercle osculateur $S = 0$ ont pour axe radical la droite

$$(6) \quad 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

qu'il est facile de construire. En effet, la polaire de l'origine par rapport à Σ a pour équation

$$Dx + Ey + F = 0.$$

Cette polaire et la droite (6) sont parallèles et leurs distances à l'origine sont dans le rapport de $\frac{1}{2}$.

On arrive donc à la règle suivante pour obtenir le cercle osculateur en un point M d'une hyperbole déterminée d'une façon quelconque :

Construire les directions asymptotiques de l'hyperbole et la tangente au point M ; mener par le point M la droite antiparallèle à la tangente par rapport aux

directions asymptotiques et tracer le cercle C circonscrit au quadrilatère ainsi obtenu; prendre la droite Δ parallèle à la polaire de l'origine par rapport à Σ et située à mi-distance entre cette polaire et l'origine; enfin tracer le cercle passant par M et ayant pour axe radical avec le cercle précédent la droite Δ , c'est le cercle osculateur.

Si l'on suppose que l'origine soit au centre de la courbe, que, par suite, les asymptotes de la conique coïncident avec les directions asymptotiques et que l'équation de l'hyperbole soit

$$\varphi(x, y) + F = 0,$$

on voit que le cercle osculateur et le cercle C sont concentriques.

Cas de la parabole. — Dans le cas d'une parabole, $\varphi(x, y)$ est un carré parfait

$$\varphi(x, y) \equiv (ax + by)^2,$$

et l'équation (3) devient

$$(7) \quad S - 2Dx - 2Ey - F \equiv (ax + by)^2 + PP_1.$$

La construction indiquée dans le cas de l'hyperbole subsiste avec une modification évidente.

Prenons le cas d'une parabole tangente aux axes Ox et Oy aux points A et B. La direction de l'axe de la parabole s'obtient en joignant le point O au milieu I de AB. Cette droite OI coupe la parabole au point K. La tangente au point K est précisément la droite Δ . Le centre du cercle C s'obtient en abaissant du point A une perpendiculaire sur OI et en élevant une perpendiculaire à Ox au point A; en prenant l'intersection de ce cercle et de la tangente au point K, on a deux points du cercle osculateur en A à la parabole. Même construction pour le point B.