

Concours d'admission à l'École centrale en 1892 (deuxième session). Solution du problème de géométrie analytique

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 12
(1893), p. 403-407

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__403_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1892
(DEUXIÈME SESSION).**

SOLUTION DU PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

PAR M. J. S.

On donne deux axes rectangulaires et un point A dont les coordonnées sont p et q . Par ce point on fait passer deux cercles, dont l'un a pour centre l'origine

et l'autre un point C de l'axe des x dont l'abscisse est a .

Par le point A on mène deux sécantes DAE, FAG ayant une longueur commune donnée $2l$ (les points D et F sont sur l'une des circonférences, et les points E et G sont sur l'autre).

1° Former l'équation générale des coniques Δ passant par les points d'intersection des deux sécantes DAE, FAG avec l'axe des y et la parallèle à cet axe menée par le point C;

2° Si l'on assujettit une des coniques Δ à passer par un point P du plan, reconnaître le genre de cette conique d'après la position du point P;

3° Déterminer le lieu du centre des coniques Δ ;

4° En faisant varier l , trouver le lieu du point de rencontre des cordes DF, EG.

I. Soit

$$y = q + m(x - p)$$

l'équation de la droite FAG, m étant un paramètre à déterminer. Cette droite coupe le cercle O en un point autre que A, dont les coordonnées sont

$$x_f = \frac{m^2 p - 2mq - p}{1 + m^2},$$

$$y_f = \frac{q - 2mp - m^2 q}{1 + m^2}.$$

La droite FAG coupe le cercle C en un point autre que A, dont les coordonnées sont

$$x_g = \frac{2a + m^2 p - p - 2mq}{1 + m^2},$$

$$y_g = \frac{q + 2am - 2mp - m^2 q}{1 + m^2}.$$

Le coefficient angulaire m est déterminé par

$$\text{ou} \quad (x_g - x_f)^2 + (y_g - y_f)^2 = 4l^2,$$

$$\text{d'où} \quad 4a^2 + 4a^2m^2 = 4l^2(1 + m^2)^2;$$

$$m = \pm \frac{\sqrt{a^2 - l^2}}{l};$$

et la condition de possibilité est $a > l$.

L'équation de FAG est donc

$$y - q = \frac{1}{l} \sqrt{a^2 - l^2} (x - p),$$

L'équation de DAE est donc

$$y - q = -\frac{1}{l} \sqrt{a^2 - l^2} (x - p).$$

L'équation générale des coniques Δ passant par les points d'intersection des deux sécantes avec l'axe des y et la parallèle à cet axe menée par le point C, sera donc

$$(\Delta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[y - q - \frac{1}{l} \sqrt{a^2 - l^2} (x - p) \right] \\ \times \left[y - q + \frac{1}{l} \sqrt{a^2 - l^2} (x - p) \right] + \lambda x(x - a) = 0, \end{array} \right.$$

ou

$$(a^2 - l^2 - \lambda l^2)x^2 - l^2 y^2 - [2p(a^2 - l^2) - \lambda a l^2]x + 2q l^2 y + p^2(a^2 - l^2) - l^2 q^2 = 0,$$

λ étant un paramètre indéterminé.

II. En faisant passer l'une des coniques Δ par un point P du plan, on détermine λ , et alors cette conique sera une ellipse si

$$\lambda > \frac{a^2 - l^2}{l^2},$$

(406)

une hyperbole si

$$\lambda < \frac{a^2 - l^2}{l^2},$$

une parabole si

$$\lambda = \frac{a^2 - l^2}{l^2}.$$

III. Le lieu des centres des coniques Δ est donné par

$$\Delta'_y = 0 \quad \text{ou} \quad -2l^2y + 2ql^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad y = q.$$

IV. Les coordonnées du point F sont

$$x_f = \frac{mp^2 - 2mq - p}{1 + m^2},$$

$$y_f = \frac{q - 2mp - m^2q}{1 + m^2}.$$

Les coordonnées du point G sont

$$x_g = \frac{2a + m^2p - 2mq - p}{1 + m^2},$$

$$y_g = \frac{2am + q - m^2q - 2mp}{1 + m^2}.$$

Les coordonnées du point D sont données en changeant m en $-m$,

$$x_d = \frac{mp^2 + 2mq - p}{1 + m^2},$$

$$y_d = \frac{q + 2mp - m^2q}{1 + m^2}.$$

Les coordonnées du point E sont trouvées en changeant m en $-m$,

$$x_e = \frac{2a + m^2p + 2mq - p}{1 + m^2},$$

$$y_e = \frac{-2am + q - m^2q + 2mp}{1 + m^2}.$$

On trouve pour l'équation de la droite DF

$$m^2(qy - px + p^2 + q^2) = px - qy + p^2 + q^2.$$

et pour l'équation de la droite EG

$$m^2[(a-p)x + qy - p(a-p) + q^2] \\ = q^2 - qy - (a-p)x + (a-p)(2a-p).$$

En éliminant m , on a pour le lieu des points de rencontre de ces deux droites

$$a(ap + q^2 - p^2)x + aq(2p - a)y - a(a-p)(p^2 + q^2) = 0$$

ou

$$(ap + q^2 - p^2)x + q(2p - a)y - (a-p)(p^2 + q^2) = 0,$$

qui est l'équation d'une droite.

A. B. — M. Barisien a aussi résolu la question.