

H. LAURENT

Sur l'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 12
(1893), p. 355-359

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__355_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ÉLIMINATION;

PAR M. H. LAURENT.

Dans le Cahier du mois d'août, j'ai fait connaître, sous forme explicite, la résultante d'un nombre quelconque d'équations algébriques; la démonstration que j'ai donnée peut être sujette à quelques objections : je vais la présenter sous une forme nouvelle et tout à fait rigoureuse. (Je signalerai une faute d'impression qui peut arrêter les lecteurs : au lieu de poser $x_{ij} = a_{ij}t_j$, il faut lire $x_{ij} = x_it_j$.)

Soient

$$\begin{array}{cccc} x_{11}, & x_{21}, & \dots, & x_{n1}, \\ x_{12}, & x_{22}, & \dots, & x_{n2}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ x_{1\mu}, & x_{2\mu}, & \dots, & x_{n\mu}. \end{array}$$

les solutions distinctes en nombre $\mu = m^n$ de n équations algébriques de degré m en $x_1, x_2, \dots, x_n$,

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \dots, \quad f_n = 0.$$

Soient

$$\begin{array}{cccc} y_{11}, & y_{21}, & \dots, & y_{n1}, \\ \dots & \dots & \dots, & \dots \\ y_{1\mu}, & y_{2\mu}, & \dots, & y_{n\mu} \end{array}$$

les solutions supposées distinctes de n autres équations algébriques de degré m , en $y_1, y_2, \dots, y_n$,

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 0, \quad \dots, \quad g_n = 0.$$

Soient enfin

$$(1) \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_n = 0, \quad \varphi_{n+1} = 0$$

$n + 1$ équations algébriques de degré m en $x_1, x_2, \dots, x_n$. On peut poser

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \varphi_i(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}) \\ &\quad + (x_1 - x_{1j}) \varphi_{i1}^j + \dots + (x_1 - x_{nj}) \varphi_{in}^j, \end{aligned}$$

φ_{ik}^j désignant un polynôme entier de degré $m - 1$ en $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}$ qui ne change pas quand on permute x_1 et x_{1j} , x_2 et x_{2j} , Posons

$$\begin{aligned} &\theta(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{1j}, x_{2j}, \dots) \\ &= \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_{11}^j & \dots & \varphi_{1n}^j \\ \varphi_2 & \varphi_{21}^j & \dots & \varphi_{2n}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n+1} & \varphi_{n+1,1}^j & \dots & \varphi_{n+1,n}^j \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

il est facile de voir que le déterminant qui entre dans cette formule ne change pas quand on y remplace la première colonne, $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ par $\varphi_1(x_{1j}, x_{2j}, \dots)$, $\varphi_2(x_{1j}, x_{2j}, \dots) \dots$; il suffit pour cela de retrancher de la première colonne la deuxième multipliée par $x_1 - x_{1j}$, la troisième multipliée par $x_2 - x_{2j}$, Donc, si l'on

pose

$$\theta_{ij} = \theta(y_{1i}, y_{2i}, \dots, x_{1j}, x_{2j}, \dots),$$

on aura

$$\theta_{ij} = \theta_{ji}.$$

Maintenant considérons le déterminant

$$(2) \quad \theta = \begin{vmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \dots & \theta_{1n} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \dots & \theta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{p1} & \theta_{p2} & \dots & \theta_{pn} \end{vmatrix};$$

on peut évidemment lui donner la forme

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \theta_{11} & \Delta_1 \theta_{11} & \Delta_2 \theta_{11} & \dots & \Delta_1^{m-1} \Delta_2^{m-1} \dots \Delta_n^{m-1} \theta_{11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{\mu 1} & \Delta_1 \theta_{\mu 1} & \Delta_2 \theta_{\mu 1} & \dots & \Delta_1^{m-1} \Delta_2^{m-1} \dots \Delta_n^{m-1} \theta_{\mu 1} \end{vmatrix},$$

Δ_1 désignant un signe de différentiation finie relatif à la variable x , Δ_2 un signe de différentiation finie relatif à la variable x_2 , Les éléments d'une même ligne dans le déterminant sont les μ termes du produit symbolique

$$(1 + \Delta_1 + \Delta_1^2 + \dots + \Delta_1^{m-1}) \\ \times (1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_2^{m-1}) \dots (1 + \Delta_n + \dots + \Delta_n^{m-1}) \theta_{k1}.$$

$\Delta_1^\alpha \Delta_2^\beta \dots \theta_{ki}$ est évidemment de degré

$$n(m-1) - \alpha - \beta \dots$$

par rapport aux x_{ij} ou aux y_{ij} . Soient maintenant ω_1 , ω_2 , ..., ω_μ les μ termes du produit

$$(1 + y_1 + y_1^2 + \dots + y_1^{m-1}) \\ \times (1 + y_2 + \dots + y_2^{m-1}) \dots (1 + y_n + \dots + y_n^{m-1})$$

et ω_{ij} la valeur de ω_i pour $y_1 = y_{1j}$, $y_2 = y_{2j}$, Soit

$$D(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{\partial(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)},$$

$$D_i = D(y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{ni});$$

multiplions le déterminant (3) par le suivant

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \frac{\omega_{11}}{D_1} & \frac{\omega_{12}}{D_2} & \dots & \frac{\omega_{1\mu}}{D_\mu} \\ \frac{\omega_{21}}{D_1} & \frac{\omega_{22}}{D_2} & \dots & \frac{\omega_{2\mu}}{D_\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\omega_{\mu 1}}{D_1} & \frac{\omega_{\mu 2}}{D_2} & \dots & \frac{\omega_{\mu\mu}}{D_\mu} \end{vmatrix} = \frac{\Omega}{D_1 D_2 \dots D_\mu} = \frac{\sum \omega_{11} \dots \omega_{\mu\mu}}{D_1 D_2 \dots D_\mu},$$

nous aurons

$$\frac{\Theta \Omega}{D_1 D_2 \dots D_\mu} = \begin{vmatrix} \sum \frac{\theta_{i1} \omega_{1i}}{D_i} & \sum \frac{\Delta_1 \theta_{i1} \omega_{1i}}{D_i} & \dots & \sum \frac{\Delta_1^{m-1} \Delta_2^{m-1} \dots \theta_{i1} \omega_{1i}}{D_i} \\ \sum \frac{\theta_{i1} \omega_{2i}}{D_i} & \sum \frac{\Delta_1 \theta_{i1} \omega_{2i}}{D_i} & \dots & \sum \frac{\Delta_1^{m-1} \Delta_2^{m-1} \dots \theta_{i1} \omega_{2i}}{D_i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

En vertu d'un théorème connu de Jacobi, les éléments de ce déterminant situés à gauche de la diagonale qui descend de gauche à droite sont nuls, les éléments de la diagonale ne dépendent que des termes du degré le plus élevé dans les g ; donc

$$\frac{\Theta \Omega}{D_1 D_2 \dots D_\mu}$$

ne dépend que des coefficients des termes du degré le plus élevé dans les g . De même, si l'on désigne par Ω' ce que devient Ω quand on y remplace les γ_{ij} par les x_{ij} , par $D'_1, D'_2, \dots$ ce que deviennent $D_1, D_2, \dots$ dans la même hypothèse, on voit que

$$\frac{\Theta \Omega'}{\prod D_i \prod D'_i}$$

ne dépendra que des coefficients des termes du degré le plus élevé dans les f et les g ; si l'on suppose les g égaux aux f , on voit que

$$\frac{\Theta \Omega^2}{(\prod D_i)^2}$$

ne dépendra que des coefficients des termes du degré le plus élevé dans les f , et, comme il en est ainsi de $\frac{\Omega^2}{\Pi D_i}, \frac{\Theta}{\Pi D_i}$ ne dépendra non plus que des termes du degré le plus élevé des f . Faisons varier ces termes sans faire varier les x_{ij} , cela revient à remplacer les f par des fonctions linéaires à coefficients constants des f . Dans ces conditions, D est multiplié par un facteur constant ΠD_i aussi; donc quand on suppose que les x_{ij} varient, $\frac{\Theta}{\Pi D_i}$ reste déterminé à un facteur près indépendant de ces x_{ij} . On pourra donc déterminer $\frac{\Theta}{\Pi D_i}$ en supposant $f_1 = \varphi_1$, $f_2 = \varphi_2$, ..., $f_n = \varphi_n$; alors Θ_{ij} se réduit au signe près à

$$\varphi_{n+1}(x_{1j}, x_{2j}, \dots) \begin{vmatrix} \varphi'_{11} & \varphi'_{12} & \dots & \varphi'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi'_{n1} & \varphi'_{n2} & \dots & \varphi'_{nn} \end{vmatrix}$$

pour $x_1 = x_{1i}$, $x_2 = x_{2i}$, ...

On voit que Θ_{ij} est nul si $i \geq j$ et qu'il est égal à 1

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni})} \quad \text{si } i = j.$$

On a donc

$$\frac{\Theta}{\Pi D_i} = \Pi \varphi_{n+1}(x_{1j}, x_{2j}, \dots),$$

à un facteur près indépendant de la forme de la fonction φ_{n+1} ; $\Theta = 0$ (ou l'on suppose $x_{ij} = \gamma_{ij}$) est donc bien la résultante des équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_{n+1} = 0,$$

et Θ est un déterminant symétrique.

Je souhaite de tout mon cœur qu'un géomètre plus habile que moi simplifie cette démonstration.