

E.-N. BARISIEN

**École navale (concours de 1893). Solution
de la question de géométrie analytique**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 12
(1893), p. 330-336

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__330_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

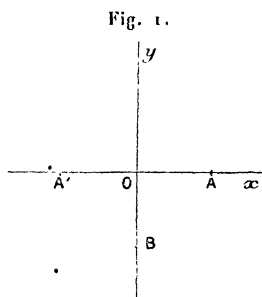
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE NAVALE (CONCOURS DE 1895).
SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMETRIE ANALYTIQUE;
PAR M. E.-N. BARISIEN.

*Oxy étant deux axes rectangulaires, et A, A', B
trois points situés sur ces axes à une même distance
de l'origine, disposés comme l'indique la figure*

$$OA = OA' = OB = R$$

1° Équation des paraboles circonscrites au triangle $AA'B$, en prenant comme paramètre variable le coefficient angulaire m de l'axe



Par chaque point du plan passent deux de ces paraboles : distinguer les régions du plan pour lesquelles des deux paraboles sont réelles.

Le lieu des points pour lesquels les axes de ces deux paraboles sont rectangulaires est une circonférence (C).

Construire en coordonnées polaires le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine O sur les axes de toutes les paraboles circonscrites au triangle ABA' .

2° Lorsqu'un point M décrit la circonférence (C), le point de rencontre des axes des deux paraboles passant par ce point décrit également une circonférence.

3° L'hyperbole équilatère, circonscrite au triangle ABA' et dont les axes sont parallèles aux axes des deux paraboles passant par un point M de la circonférence (C), passe par ce point M.

L'équation générale des paraboles, ayant un axe de coefficient angulaire m , est

$$(y - mx + \lambda)^2 = r(x + my + \mu)$$

ou, en développant,

$$(y - mx)^2 + (2\lambda - \rho m)y - (2\lambda m + \rho)x + \lambda^2 - \rho\mu = 0.$$

Exprimons que cette parabole passe par les points A et A' : on trouve, en faisant $y = 0$, les deux relations

$$(1) \quad 2\lambda m + \rho = 0,$$

$$(2) \quad \lambda^2 - \rho\mu = -m^2 R^2.$$

On trouve de même, en exprimant que la parabole passe par B', la relation

$$(3) \quad R^2 - R(2\lambda - \rho m) + \lambda^2 - \rho\mu = 0,$$

ou, d'après (3),

$$(4) \quad 2\lambda - \rho m = R(1 - m^2).$$

Les relations (1), (2) et (4) permettent de déterminer λ , ρ et μ en fonction de m .

La valeur de λ seule nous intéresse : elle a pour expression

$$\lambda = \frac{(1 - m^2) R}{2(1 + m^2)}.$$

En tenant compte de (1), (2) et (4), l'équation générale des paraboles devient

$$(5) \quad (y - mx)^2 + (1 - m^2) Ry - m^2 R^2 = 0.$$

Cette équation s'écrit, en l'ordonnant par rapport à m ,

$$(6) \quad m^2(x^2 - Ry - R^2) - 2mxy + y^2 + Ry = 0.$$

Donc, par un point (x, y) du plan, il passe deux paraboles répondant aux deux valeurs de m fournies par (6). Les deux paraboles seront réelles si l'on a

$$x^2 y^2 - (y^2 + Ry)(x^2 - Ry - R^2) \geq 0$$

ou

$$y(y + x + R)(y - x + R) \geq 0.$$

On voit donc que si le point est à l'intérieur du triangle ABA' ou dans le prolongement des angles de ce triangle, les paraboles sont imaginaires. Lorsque le point est dans le reste du plan, les paraboles sont réelles.

Lieu des points pour lesquels les axes des deux paraboles sont rectangulaires. — Si m' et m'' sont les racines de (6), on doit avoir

$$m' m'' = -1$$

et, par conséquent,

$$\frac{y^2 + Ry}{x^2 - Ry - R^2} = -1$$

ou

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Le lieu de ces points est donc le cercle de centre O et de rayon R.

Lieu de la projection du point O sur les axes des paraboles. — L'axe d'une des paraboles a pour équation

$$y - mx + \lambda = 0$$

c'est-à-dire

$$(7) \quad y - mx + \frac{(1 - m^2)R}{2(1 + m^2)} = 0.$$

La perpendiculaire abaissée de O sur cet axe a pour équation

$$(8) \quad my + x = 0.$$

En éliminant m entre (7) et (8), on trouve l'équation

$$2(x^2 + y^2)^2 + Ry(y^2 - x^2) = 0.$$

C'est une quartique dont l'équation en coordonnées polaires est

$$r = \frac{R}{2} \sin \theta \cos 2\theta.$$

Cette courbe fermée a pour axe de symétrie l'axe des y : le point O est un point triple (1). C'est un trifolium dont le rayon maximum de la plus grande boucle est $\frac{R}{2}$ et le rayon maximum des deux autres boucles est $\frac{R}{3\sqrt{6}}$.

2° Soient x_1 et y_1 les coordonnées d'un point M de la circonférence (C). On a donc

$$(9) \quad x_1^2 + y_1^2 = R^2.$$

L'équation (6) devient alors

$$m^2(x_1^2 - Ry_1 - R^2) - 2mx_1y_1 + y_1^2 + Ry_1 = 0$$

ou, en tenant compte de (9),

$$(10) \quad m^2(y_1 + R) + 2mx_1 - (y_1 + R) = 0.$$

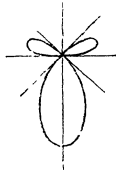
Si m' et m'' sont les deux racines de (10), les équations des axes des deux paraboles passant par M sont

$$(11) \quad y - m'x + \frac{(1 - m'^2)R}{2(1 + m'^2)} = 0.$$

$$(12) \quad y - m''x + \frac{(1 - m''^2)R}{2(1 + m''^2)} = 0.$$

L'équation (10) fournirait m' et m'' en fonction de x_1 et y_1 , et il resterait à éliminer x_1 et y_1 entre (9), (11) et (12). On évitera cette élimination laborieuse en remar-

(1) Ce trifolium offre en outre la propriété remarquable d'avoir



son aire équivalente au $\frac{1}{3}$ de l'aire du cercle de rayon R.

quant que l'équation

$$(13) \quad y - mx + \frac{(1 - m^2)R}{2(1 + m^2)} = 0$$

doit admettre les racines m' et m'' de (10). Cette équation (13) peut s'écrire

$$(14) \quad 2m^3x - (2y - R)m^2 + 2mx - (2y + R) = 0.$$

Si m''' est la troisième racine de (14), on a

$$(15) \quad (m' + m'') + m''' = \frac{2y - R}{2x},$$

$$(16) \quad (m' - m'')m''' + m'm'' = 1,$$

$$(17) \quad (m'm'')m''' = \frac{2y + R}{2x}.$$

Mais, d'après (10),

$$m' + m'' = -\frac{2x_1}{y_1 + R}, \quad m'm'' = -1.$$

Les équations (15), (16) et (17) deviennent alors

$$(15)' \quad -\frac{2x_1}{y_1 + R} + m''' = \frac{2y - R}{2x},$$

$$(16)' \quad m''' = -\frac{y_1 + R}{x_1},$$

$$(17)' \quad m''' = -\frac{2y + R}{2x}.$$

En portant la valeur (17)' de m''' dans (15)', il vient

$$(18) \quad \frac{x_1}{y_1 + R} = -\frac{y}{x}.$$

En comparant (16)' et (17)', on a

$$(19) \quad \frac{y_1 + R}{x_1} = \frac{2y + R}{2x}.$$

En multipliant membre à membre (18) et (19), on trouve

$$x^2 + y^2 + \frac{Ry}{2} = 0.$$

C'est un cercle de rayon $\frac{R}{4}$, tangent à l'origine.

3° L'équation générale des hyperboles équilatères circonscrites au triangle AA'B a pour équation

$$(20) \quad x^2 - y^2 + 2Bxy - 2Ry - R^2 = 0.$$

L'équation aux coefficients angulaires des axes de cette hyperbole est

$$(21) \quad m^2 + \frac{2m}{B} - 1 = 0:$$

d'où

$$B = \frac{2m}{1 - m^2}.$$

Par conséquent l'équation (20) devient

$$(22) \quad x^2 - y^2 + \frac{4mxy}{1 - m^2} - 2Ry - R^2 = 0.$$

Cette hyperbole équilatère a ses axes parallèles à ceux de la parabole (5).

Or, si l'on fait $x^2 = R^2 - y^2$ dans les équations (22) et (5), on trouve qu'elles sont identiques. Donc, si la parabole (5) passe par un point de la circonférence (C), l'hyperbole (22) passe par le même point.
