

H. LAURENT

**Reconnaître si un polynôme à plusieurs variables peut être décomposé en facteurs entiers**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 12 (1893), p. 315-321

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1893\\_3\\_12\\_\\_315\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__315_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

---

**RECONNAITRE SI UN POLYNÔME A PLUSIEURS VARIABLES  
PEUT ÊTRE DÉCOMPOSÉ EN FACTEURS ENTIERS;**

PAR M. H. LAURENT.

---

Soient  $f_1, f_2, \dots, f_n$  des polynômes entiers en  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de degré  $m$ . Soient

$$\begin{array}{cccc} x_{11}, & x_{21}, & \dots, & x_{n1}, \\ x_{12}, & x_{22}, & \dots, & x_{n2}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ x_{1\mu}, & x_{2\mu}, & \dots, & x_{n\mu} \end{array}$$

les  $\mu = m^n$  solutions supposées finies et distinctes des équations

$$(1) \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \dots, \quad f_n = 0.$$

On peut poser

$$f_i = f_i(x_{1j}, x_{2j}, \dots) + f'_{i1}(x_1 - x_{1j}) + \dots + f'_{in}(x_1 - x_{nj}),$$

$f_{i1}, f_{i2}, \dots$  désignant des polynômes entiers de degré

$m - 1$  et cela d'une infinité de manières; posons alors

$$\xi_i = \begin{vmatrix} f'_{i1} & f'_{i2} & \dots & f'_{in} \\ f'_{21} & f'_{22} & \dots & f'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{n1} & f'_{n2} & \dots & f'_{nn} \end{vmatrix} : \left[ \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right]_{x_i = x_{1i}}.$$

Les  $\mu$  quantités  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\mu$  jouiront des propriétés suivantes (nous supposons toujours que  $\xi_i$  se change en  $\xi_j$  quand  $x_{1i}, x_{2i}, \dots$  se changent en  $x_{1j}, x_{2j}, \dots$ , ce qui est évidemment permis) :

1° Entre les  $\xi$  il ne saurait exister de relations homogènes à coefficients constants. En effet, on peut remarquer que  $\xi_i$  est nul en même temps que les  $f$ , excepté pour  $x_1 = x_{1i}, x_2 = x_{2i}, \dots$  et que pour ces valeurs des  $x$  il se réduit à l'unité; si l'on pouvait avoir

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_\mu \xi_\mu = 0,$$

en faisant  $x_1 = x_{1i}, x_2 = x_{2i}, \dots$ , on aurait

$$a_i = 0;$$

on verrait de même que

$$a_2 = 0, \quad \dots;$$

2° Si l'on a

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots = b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + \dots,$$

$a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  étant des constantes, on en conclura

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \dots;$$

3° Si l'on désigne par  $F$  un polynôme entier en  $x$  qui prenne pour  $x_{1i}, x_{2i}, \dots$  la valeur  $F_i$  quel que soit  $i$ , on aura

$$F = F_1 \xi_1 + F_2 \xi_2 + \dots + F_\mu \xi_\mu.$$

le signe  $\equiv$  désignant une égalité dans laquelle on néglige des multiples de  $f_1, f_2, \dots, f_n$ ; en effet, les deux membres de la formule précédente sont égaux quand les  $f$  sont nuls.

$D_i \xi_i$  est de degré  $n(m-1)$  en  $x_{1i}, x_{2i}, \dots$ .  $D_i$  désignant la valeur de

$$D = \frac{\partial(f_1 \dots f_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)}$$

pour  $x_1 = x_{1i}, x_2 = x_{2i}, \dots$ , les termes de  $D_i \xi_i$  qui contiennent  $x_1, x_2, \dots$  ou  $x_n$  sont de degré inférieur : donc, d'après un théorème connu de Jacobi, dans la somme  $\Sigma \xi_i$  tous les termes contenant les variables  $x_1, x_2, \dots$  seront nuls; ainsi  $\Sigma \xi_i$  ne dépend pas des  $x$ ; or pour des valeurs des  $x$  annulant les  $f$ ,  $\Sigma \xi_i$  est égal à un, donc;

4° On a la relation

$$(2) \quad \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\mu = 1;$$

5° De (2) on tire

$$(3) \quad \begin{cases} \xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \dots + \xi_1 \xi_\mu = \xi_1, \\ \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_2 \xi_\mu = \xi_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \end{cases}$$

6°  $\xi_i \xi_j$  est nul en même temps que les  $f, \xi_i^2$  aussi, excepté pour  $x_1 = x_{1i}, x_2 = x_{2i}, \dots$  et alors il est égal à un; on a donc

$$\xi_i \xi_j \equiv 0, \quad \xi_i^2 \equiv \xi_i.$$

Cela posé, considérons un polynôme  $F$  de degré  $m-1$  au plus; on peut poser

$$F = F(x_{1i}, x_{2i}, \dots)(x_1 - x_{1i})F_1^i + \dots + (x_n - x_{ni})F_n^i,$$

$F_1^i, F_2^i, \dots$  désignant des polynômes de degré inférieur

à  $m - 1$  et l'on aura, en posant

$$F_i = F(x_{1i}, x_{2i}, \dots),$$

$$\begin{vmatrix} F - F_1 & F_1^i & F_2^i & \dots & F_n^i \\ f_1 & f_{11}^i & \dots & \dots & f_{1n}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & f_{n1}^i & \dots & \dots & f_{nn}^i \end{vmatrix} = 0,$$

ce que l'on peut écrire

$$(F - F_i) \xi_i D_i = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots$  désignant des polynômes de degré inférieur à  $n(m - 1)$ ; on en tire

$$(F - F_i) \xi_i = \frac{\lambda_1}{D_i} f_1 + \dots + \lambda_n \frac{f_n}{D_i}.$$

Si dans cette formule on fait  $i = 1, 2, \dots$  et si l'on ajoute les résultats obtenus, on aura, en vertu du théorème de Jacobi déjà invoqué,

$$\Sigma (F - F_i) \xi_i = 0$$

et, en vertu de (2),

$$(4) \quad F = F_1 \xi_1 + F_2 \xi_2 + \dots + F_\mu \xi_\mu.$$

Le signe  $=$  devrait être remplacé par  $\equiv$  si le degré de  $F$  surpassait  $m - 1$ .

Supposons que le polynôme  $F$  de  $m - 1$  soit le produit de deux facteurs  $\varphi, \psi$  des degrés  $n, p$ ,  $n + p < m$ , on aura

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 \xi_2 + \dots + \varphi_\mu \xi_\mu, \\ \psi &= \psi_1 \xi_1 + \psi_2 \xi_2 + \dots + \psi_\mu \xi_\mu. \end{aligned}$$

$\varphi_i, \psi_i$  désignant  $\varphi(x_{1i}, x_{2i}, \dots)$  et  $\psi(x_{1i}, x_{2i}, \dots)$  et par suite

$$\varphi \psi = F = \Sigma \varphi_i \psi_j \xi_i^2 \xi_j,$$

remplaçons dans cette formule  $\xi_i^2$  par sa valeur tirée

de (3), nous aurons

$$\varphi\psi = F = \Sigma \varphi_i \psi_i \xi_i + \Sigma \xi_i \xi_j (\varphi_i \psi_j + \psi_i \varphi_j - \varphi_i \psi_i - \psi_i \psi_j),$$

et, en vertu de (4),

$$\Sigma \xi_i \xi_j (\varphi_i \psi_j + \psi_i \varphi_j - \varphi_i \psi_i - \psi_i \psi_j) = 0;$$

c'est une relation entre les  $\xi_i, \xi_j$  : il existera ainsi entre ces quantités une infinité de relations, mais il est clair qu'elles ne seront pas toutes distinctes.

Dans la pratique, il conviendra de prendre

$$f_1 = (x_1 - a_1)(x_1 - a_2) \dots (x_1 - a_m),$$

$$f_2 = (x_2 - b_1)(x_2 - b_2) \dots (x_2 - b_m),$$

$$\dots\dots\dots;$$

alors les  $\xi_i$  seront de la forme

$$\frac{f_1 f_2 \dots f_n}{f'_1(a_i) f'_2(b_j) \dots} = \frac{1}{x_1 - a_1} \frac{1}{x_2 - b_j} \dots$$

Pour former les relations identiques du second degré entre les  $\xi_i$  nous calculerons les  $\xi_i, \xi_j$  en observant qu'ils sont égaux à des sommes de fractions simples, abstraction faite du facteur  $f_1^2 f_2^2 \dots$  et qu'ils sont par suite exprimables linéairement en fonction de quantités de la forme  $f_1 f_2 f_n \dots \xi$  pourvu qu'ils ne contiennent pas en dénominateur de facteur carré.

Considérons d'abord les produits  $\xi_i \xi_j$ , dans lesquels les lettres  $a, b, c, \dots$  n'entrent qu'avec les indices 1, 2; l'un d'eux contiendra en dénominateur

$$\frac{1}{(x_1 - a_1)(x_1 - a_2)(x_2 - b_1)(x_2 - b_2) \dots};$$

ce produit que l'on peut obtenir en prenant les facteurs  $\xi$  de plusieurs manières est le seul que l'on pourra utiliser : il en résulte l'égalité de plusieurs produits de la forme  $\xi_i \xi_j$ ; ces produits sont au nombre de  $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ ,

et fournissent  $2^{n-1} - 1$  relations entre les  $\xi_i, \xi_j$ ; mais, au lieu de combiner les lettres portant les indices 1, 2, on peut choisir deux indices quelconques : le nombre total des résultats obtenus sera  $2^{n-1} - 1$  multiplié par le nombre de combinaisons de  $mn$  lettres où il y aura deux  $a$ , deux  $b$ , etc., c'est-à-dire  $\frac{C_{mn}^{2n}}{2^n}$ . Ce n'est pas tout : nous avons dit que les produits  $\xi_i \xi_j$  s'exprimaient linéairement au moyen des  $f_1, f_2, \dots, f_n, \xi_i$  entre les relations qui expriment les  $\xi_i \xi_j$ ; on pourra en général éliminer les  $f_1, f_2, \dots, f_n, \xi_i$ , ce qui fournira de nouvelles identités entre les  $\xi_i \xi_j$ .

Quels que soient les polynômes  $f$  dont on fera usage, les identités entre les  $\xi_i \xi_j$  ne renfermeront pas les  $\xi_i^2$ , car devant avoir lieu pour  $x_1 = x_{11}, x_2 = x_{21}, \dots$  leurs coefficients seront nuls, etc.

Lorsque l'on aura formé les identités entre les  $\xi_i \xi_j$ , il sera facile de résoudre la question suivante :

*Étant donné un polynôme  $F$  de degré  $m - 1$ , reconnaître s'il est réductible et dans ce cas le décomposer en facteurs entiers.*

Pour cela on ajoutera à l'identité

$$F = \Sigma F_i \xi_i \Sigma \xi_i = \Sigma \xi_i \xi_j (F_i + F_j),$$

toutes les identités qui ont lieu entre les  $\xi_i, \xi_j$  respectivement multipliées par des facteurs  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ .  $F$  prendra la forme

$$F = \Sigma a_{ij} \xi_i \xi_j,$$

où les  $a_{ij}$  contiennent les  $\lambda$  linéairement. S'il existe alors des valeurs non nulles des  $\lambda$  pour lesquelles  $\Sigma a_{ij}, \xi_i \xi_j$  se réduise à une somme de deux carrés,  $F$  ne sera pas irréductible, et réciproquement si  $F$  est le produit de deux facteurs entiers  $\Sigma a_{ij}, \xi_i \xi_j$  pour des valeurs

convenables des  $\lambda$ , se réduira à une somme de carrés : il y aura autant de systèmes de valeurs de  $\lambda$  satisfaisant à cette condition que de manières de décomposer F en facteurs entiers.

Pour exprimer que F est une somme de deux carrés, il faut écrire qu'une certaine équation bien connue

$$\Sigma \pm (a_{11} - s) \dots (a_{\mu\mu} - s) = 0$$

a  $\mu - 2$  racines nulles, ce qui fait  $\mu - 2$  conditions à écrire et, comme F n'est généralement pas un produit, le nombre des  $\lambda$  est inférieur à  $\mu - 2$  : le nombre des identités entre les  $\xi_i \xi_j$  est donc inférieur à  $\mu - 2$ .