

H. LAURENT

**Démonstration d'une formule qui donne,
sous forme explicite, la résultante de
plusieurs équations algébriques**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 12
(1893), p. 305-315

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__305_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE QUI DONNE, SOUS FORME EXPLICITE, LA RÉSULTANTE DE PLUSIEURS ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

Soient $f_1, f_2, \dots, f_n$ des polynômes entiers en x de degré m , choisis de telle sorte que les $\mu = m^n$ solutions

$$\begin{array}{cccc} x_{11}, & x_{21}, & \dots, & x_{n1}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ x_{1\mu}, & x_{2\mu}, & \dots, & x_{\mu\mu}. \end{array}$$

des équations

$$(1) \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_n = 0$$

soient finies et distinctes.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+1}$, $n+1$ polynômes entiers en $x_1, x_2, \dots, x_n$ et de degré m également. On pourra poser d'une infinité de manières

$$(2) \quad \varphi_i = \varphi_i(x_{1j}, x_{2j}, \dots) + (x_1 - x_{1j})\varphi_{i1}^j + \dots + (x_n - x_{nj})\varphi_{in}^j,$$

les φ_{ij}^k désignant des polynômes de degré $m-1$ par rapport aux x_i et aux x_{ij} ; nous poserons encore

$$\theta(x_1, x_2, \dots, x_{1i}, x_{2i}, \dots) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_{11}^i & \dots & \varphi_{1n}^i \\ \varphi_2 & \varphi_{21}^i & \dots & \varphi_{2n}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n+1} & \varphi_{n+1,1}^i & \dots & \varphi_{n+1,n}^i \end{vmatrix} = \theta_{0i},$$

$$\theta(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{1j}, x_{2j}, \dots) = \theta_{ij}$$

et il est clair que l'on peut supposer $\theta_{ij} = \theta_{ji}$, mais cela n'est pas nécessaire pour ce qui va suivre. Considérons le déterminant

$$\theta = \Sigma \pm \theta_{11} \theta_{22} \dots \theta_{\mu\mu}$$

Remplaçons les membres extrêmes de cette suite d'égalités par leurs degrés relatifs aux t ; en appelant δ le degré de Θ , nous aurons

$$\mu n(m-1) = \delta,$$

car $\Pi(t_i - t_j)$ est égal, à un facteur constant près, à $G'(t_1) G'(t_2) \dots$.

Ainsi Θ est de degré $\mu n(m-1)$.

Maintenant posons

$$D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)},$$

$$D_i = D(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}),$$

et considérons le quotient

$$\frac{\Theta}{D_1 D_2 \dots D_\mu};$$

le numérateur et le dénominateur sont de même degré $\mu n(m-1)$, Θ s'annule quand les équations (1) ont une solution double, le dénominateur $D_1 D_2 \dots$ aussi, Θ et $D_1 D_2 \dots$ sont nuls en même temps : donc Θ est divisible par $D_1 D_2 \dots$, donc le quotient considéré ne contient pas les x_{ij} . On peut donc évaluer sa valeur numérique en donnant aux x_{ij} des valeurs arbitraires solutions d'équations de degré m . Prenons alors les x_{ij} égaux aux solutions des équations

$$(3) \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_n = 0;$$

θ_{ij} se réduit alors à

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots \\ 0 & \dots \\ \vdots & \dots \\ \varphi_{n+1}(x_{1i}, x_{2i}, \dots) & \dots \end{vmatrix} = \varphi_{n+1}(x_{1i}, x_{2i}, \dots) \lambda_{ij},$$

λ_{ij} désignant une quantité indépendante des coefficients

$x_1 = x_{ij}, x_2 = x_{2j}, \dots$ excepté pour $i = j$ et alors il se réduit à

$$\left[\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right]_{x_1 = x_{1i}, \dots} = \Delta_i;$$

le déterminant Λ est donc égal à $\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_\mu$ qui n'est pas nul en général.

Maintenant supposons la fonction φ_{n+1} remplacée par $\psi z + \varphi_{n+1}$, z désignant une arbitraire et ψ une fonction de degré m ; dans ce cas Θ devient

$$\Theta + z\Theta_1 + \dots + z^\mu\Theta_\mu,$$

et l'équation

$$\Theta + z\Theta_1 + \dots + z^\mu\Theta_\mu = 0$$

a pour racines les diverses valeurs que prend $-\frac{\varphi_{n+1}}{\psi}$ quand on y remplace les x par une solution des équations (3). Les coefficients de cette équation divisés par Θ_μ font alors connaître des fonctions symétriques des solutions de (3) et en particulier, si l'on suppose $\psi = 1$, φ_{n+1} successivement égal à $x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^2, \dots$. On peut ainsi se procurer très facilement ce que l'on appelle les *fonctions simples* et beaucoup d'autres.

On voit, en particulier, que les fonctions symétriques *entières* des solutions de (3) ne contiennent en dénominateur que Θ_μ et que leur numérateur est entier par rapport aux coefficients des φ . Or Θ_μ est la valeur que prend Θ quand on y fait $\varphi_{n+1} = 1$: c'est la quantité que nous avons désignée plus haut par Λ ; elle est divisible par $D_1 D_2 \dots D_\mu$. Rien n'empêche de supposer que l'on a enlevé ce facteur de Θ , mais alors Θ_μ est manifestement de poids nul et, pour l'évaluer, on peut supposer les fonctions φ réduites à leurs termes de degré m .

Il est bon d'observer que l'on peut déduire de la théorie précédente l'expression de ce que l'on appelle

les fonctions ζ jouiront alors de la propriété suivante :

1^o ζ_i se réduira à un pour $x_1 = x_{1i}$, $x_2 = x_{2i}$, ...;

2^o ζ_i sera nul pour $i \geq j$ si $x_1 = x_{1j}$, $x_2 = x_{2j}$, ..., et l'on aura

$$\theta_{11}\zeta_1 + \theta_{12}\zeta_2 + \dots + \theta_{1\mu}\zeta_\mu = \theta_1,$$

$$\theta_{21}\zeta_1 + \theta_{22}\zeta_2 + \dots + \theta_{2\mu}\zeta_\mu = \theta_2,$$

$$\dots\dots\dots;$$

ces équations, quand $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$, ... font connaître les fonctions ζ de la solution commune aux équations (4).

Je ferai enfin observer que, si les mineurs de Θ sont nuls, les équations (4) ont une solution double; si les mineurs du second ordre de Θ sont nuls, elles ont une solution triple et ainsi de suite. On pourrait, en modifiant un peu cette méthode, indiquer le moyen de calculer la solution commune, mais les calculs théoriquement possibles ne seraient d'aucune utilité en pratique à cause de leur longueur.

La recherche de la résultante a jusqu'ici été subordonnée à la théorie des fonctions symétriques; dans ce qui précède je fais dépendre au contraire la théorie des fonctions symétriques de la théorie de l'élimination : le résultat est évidemment plus simple. Mais, même dans l'ancienne théorie, on n'était pas parvenu à mettre la résultante sous forme explicite; on peut combler cette lacune comme il suit :

Au point de vue pratique, le résultat que je vais indiquer n'a évidemment aucune valeur, car le calcul des fonctions symétriques restera toujours très laborieux; mais il peut avoir une certaine importance théorique; en tout cas, c'est l'expression d'une identité remarquable.

Supposons que

$$\begin{array}{cccc} x_{11}, & x_{21}, & \dots & x_{n1}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ x_{1\mu}, & x_{2\mu}, & \dots, & x_{n\mu} \end{array}$$

soient les solutions des équations (4). Désignons par $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_\mu$ les différents termes du produit (en nombre μ)

$$(1 + x_1 + x_1^2 + \dots + x_1^{m-1})(1 + x_2 + x_2^2 + \dots + x_2^{m-1}) \dots \\ \times (1 + x_n + x_n^2 + \dots + x_n^{m-1})$$

et par ω_{ij} la valeur que prend ω_i quand on fait $x_1 = x_{1j}, x_2 = x_{2j}, \dots$. Désignons toujours par Δ le déterminant fonctionnel de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ et par Δ_j la valeur qu'il prend pour $x_1 = x_{1j}, x_2 = x_{2j}, \dots$. Le déterminant $\Sigma \pm \omega_{11}, \omega_{22}, \dots, \omega_{\mu\mu}$ s'annule toutes les fois que deux solutions des équations (4) deviennent égales et il en est de même de $\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_\mu$; le carré du premier déterminant est de même degré : donc

$$(\Sigma \pm \omega_{11} \omega_{22} \dots \omega_{\mu\mu})^2 = G \Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_\mu.$$

G désignant une quantité indépendante des solutions de (4) et par suite ne dépendant que des coefficients des termes du degré le plus élevé dans les φ . Considérons alors les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} \varphi_{n+1}^1 \frac{\omega_{11}}{\Delta_1} & \varphi_{n+1}^1 \frac{\omega_{21}}{\Delta_1} & \dots & \varphi_{n+1}^1 \frac{\omega_{\mu 1}}{\Delta_1} \\ \varphi_{n+1}^2 \frac{\omega_{12}}{\Delta_2} & \varphi_{n+1}^2 \frac{\omega_{22}}{\Delta_2} & \dots & \varphi_{n+1}^2 \frac{\omega_{\mu 2}}{\Delta_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n+1}^\mu \frac{\omega_{1\mu}}{\Delta_\mu} & \varphi_{n+1}^\mu \frac{\omega_{2\mu}}{\Delta_\mu} & \dots & \varphi_{n+1}^\mu \frac{\omega_{\mu\mu}}{\Delta_\mu} \end{vmatrix},$$

dans lesquels φ_{n+1}^t désigne, pour abréger,

$$\varphi_{n+1}(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}) \quad \text{et} \quad \Sigma \pm \omega_{11} \omega_{22} \dots \omega_{\mu\mu}$$

le premier est égal à

$$\frac{\varphi_{n+1}^1 \varphi_{n+1}^2 \dots \varphi_{n+1}^\mu}{\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_n} \Sigma \pm \omega_{11} \omega_{22} \dots \omega_{\mu\mu};$$

leur produit sera donc $\varphi_{n+1}^1 \varphi_{n+1}^2 \dots \varphi_{n+1}^\mu$, à un facteur près, qui ne dépend que des termes du degré le plus élevé dans $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$; en égalant ce produit à zéro, on aura la résultante, qui est par conséquent

$$\begin{vmatrix} \Sigma \frac{\varphi_{n+1} \omega_1^2}{\Delta} & \Sigma \frac{\varphi_{n+1} \omega_1 \omega_2}{\Delta} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \Sigma \frac{\varphi_{n+1} \omega_\mu^2}{\Delta} & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Tous les termes du déterminant sont des fonctions symétriques, calculables par la méthode de Jacobi. Ce résultat montre comment on peut arriver de proche en proche à former la résultante en passant successivement par des systèmes à deux, trois, etc. inconnues.

Les fonctions symétriques de Jacobi $\Sigma \frac{F}{\Delta}$ sont en général difficiles à calculer; il en est cependant un certain nombre qui sont nulles, ce qui dispense d'en faire le calcul; il y en a un certain nombre d'autres que l'on peut encore calculer pratiquement en évitant la méthode de Jacobi que l'on ne peut pas matériellement employer.

Posons

$$\varphi_i = \varphi_i(x_{1j}, x_{2j}, \dots) + (x_1 - x_{1j}) \varphi_{i1}^j + \dots + (x_n - x_{nj}) \varphi_{in}^j,$$

$$\xi_i = \begin{vmatrix} \varphi_{11}^i & \varphi_{12}^i & \dots & \varphi_{1n}^i \\ \varphi_{21}^i & \varphi_{22}^i & \dots & \varphi_{2n}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}^i & \varphi_{n2}^i & \dots & \varphi_{nn}^i \end{vmatrix} : \Delta_i.$$

Si l'on désigne par F une fonction quelconque de $x_1, x_2, \dots, x_n$, de degré inférieur à m et par F_i la valeur

qu'elle prend pour $x_1 = x_{1i}, x_2 = x_{2i}, \dots$, on aura

$$F = F_1 \xi_1 + F_2 \xi_2 + \dots + F_\mu \xi_\mu,$$

en particulier

$$1 = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\mu.$$

Si l'on fait l'identification des deux membres de la formule précédente, on trouve des formules qui sont des cas particuliers de la formule de Jacobi.

On peut donner à la résultante des équations (4) ou plutôt aux éléments du déterminant Θ une forme qu'il est bon d'indiquer : soit $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un polynôme entier, $c_1, c_2, \dots, c_n$ des quantités quelconques. Posons

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \dots,$$

$$F = \int_0^1 f(c_1 + t \overline{x_1 - c_1}, c_2 + t \overline{x_2 - c_2}, \dots) \frac{dt}{t},$$

on aura

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \int_0^1 f_1(c_1 + t \overline{x_1 - c_1}, c_2 + t \overline{x_2 - c_2}, \dots) dt,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \int_0^1 f_2(c_1 + t \overline{x_1 - c_1}, c_2 + t \overline{x_2 - c_2}, \dots) dt,$$

$$\dots\dots\dots;$$

on en conclut

$$\begin{aligned} & (x_1 - c_1) \frac{\partial F}{\partial x_1} + (x_2 - c_2) \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(c_1 + t \overline{x_1 - c_1}, c_2 + t \overline{x_2 - c_2}, \dots) dt \\ &= f(x_1, x_2, \dots) - f(c_1, c_2, \dots). \end{aligned}$$

Il résulte de là que les fonctions que nous avons désignées par Θ sont des déterminants fonctionnels, et si

l'on fait

$$\Phi_{ij} = \int_0^1 \varphi_i(x_{1j} + t\overline{x_1 - x_{1j}}, x_{2j} + t\overline{x_2 - x_{2j}}, \dots) \frac{dt}{t} \\ + x_{n+1} \varphi_i(x_{1j}, x_{2j}, \dots),$$

on aura

$$\theta_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial(\Phi_{1j}, \Phi_{2j}, \dots, \Phi_{n+1-j})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}$$

au signe près.