NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. JABLONSKI

Démonstration du théorème de d'Alembert

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 12 (1893), p. 301-304

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__301_0>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE D'ALEMBERT;

PAR M. E. JABLONSKI,
Professeur au lycée Charlemagne.

J'ai donné dernièrement dans le *Bulletin scientifique* de M. Lebon une démonstration de ce théorème que je croyais nouvelle; M. Brisse m'a fait observer qu'elle avait été donnée jadis par Sturm et arrangée par Liouville. En voici une autre que je crois préférable, et qui ne laisserait rien à désirer si l'on pouvait établir d'une manière plus élémentaire le lemme sur lequel je m'appuie.

LEMME. — *On peut toujours trouver dans le plan au moins une valeur finie de z telle que le module d'un polynôme $f(z)$ prenne une valeur moindre qu'un nombre donné ε, si petit qu'il soit.*

En effet, si pour toute valeur de z le module de $f(z)$ était supérieur à ε, celui de $\frac{1}{f(z)}$ serait inférieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, nombre fixe donné; donc cette dernière fonction qui est holomorphe dans toute l'étendue du plan serait une constante, en vertu du théorème de Liouville. Il en serait donc de même de $f(z)$, c'est-à-dire que tous les coefficients seraient nuls, sauf le terme indépendant de z, ce qu'on ne suppose pas.

THÉORÈME. — *Si une équation algébrique de degré $m-1$ admet $m-1$ racines, toute équation algébrique de degré m admet m racines.*

Soit

$$f(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_m = 0$$

une équation algébrique de degré m. L'équation dérivée $f'(z) = 0$ est de degré $m-1$ et admet, par hypothèse, $m-1$ racines $a, b, c, \ldots, l$. Si l'un des nombres $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $\ldots$, $f(l)$ est nul, le théorème est démontré. Sinon soit $\operatorname{mod} f(a) = A \neq 0$; on peut décrire de a comme centre un cercle de rayon ρ assez petit, mais fixe, tel que dans tout l'intérieur de ce cercle on ait

$$\operatorname{mod} f(z) > \frac{A}{2}.$$

Donc, si l'on suppose, ce qui est permis, que A est le plus petit des modules des nombres $f(a), f(b), \ldots, f(l)$, cette condition sera satisfaite dans tout l'intérieur de tous les cercles de rayon ρ, de centres $a, b, c, \ldots, l$ et, par conséquent, si pour un point z on a

$$\operatorname{mod} f(z) < \frac{A}{2},$$

le point z sera extérieur à tous ces cercles.

Or on a

$$f'(z) \equiv m A_0 (z-a)(z-b)\ldots(z-l);$$

donc, pour tout point extérieur aux cercles ρ,

$$\operatorname{mod} f'(z) > m A_0 \rho^{m-1} \qquad \text{ou} \qquad P.$$

On peut ensuite décrire, de l'origine comme centre, une circonférence de rayon ρ' assez grand, mais fixe, tel que pour tout point extérieur à cette circonférence on ait

$$\operatorname{mod} f(z) > M,$$

M étant un nombre donné.

Donc tout point z tel que $f(z) < M$ est à l'intérieur de ce cercle ρ' et les modules de

$$\frac{1}{2} f''(z), \quad \frac{1}{3!} f'''(z), \quad \frac{1}{4!} f^{IV}(z), \quad \ldots, \quad \frac{1}{m!} f^m(z)$$

sont tous moindres qu'un nombre assignable M' fixe.

Cela posé, je puis choisir z_0 tel que le module de $f(z_0)$ ou R_0 soit moindre que le plus petit des nombres

$$\frac{A}{2}, \quad M, \quad P, \quad \frac{P^2}{(m-1)M'} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\alpha};$$

il sera intérieur au cercle ρ' et extérieur aux cercles ρ; en particulier $R_0 \alpha < 1$.

Je fais $z = z_0 + h$, d'où

$$f(z_0+h) = f(z_0) + h f'(z_0) + \frac{h^2}{2!} f''(z_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(z_0) + \ldots + \frac{h^m}{m!} f^m(z_0),$$

puis $h = -\dfrac{f(z_0)}{f'(z_0)}$, j'ai

$$f(z_0+h) = h^2 \left[\frac{1}{2} f''(z_0) + \frac{h}{3!} f'''(z_0) + \ldots + \frac{h^m}{m!} f^m(z_0) \right];$$

donc

$$\operatorname{mod} f(z_0+h)$$

ou

$$R_1 < h^2 (m-1) M' < R_0^2 \frac{(m-1) M'}{P^2} = R_0^2 \alpha < R_0.$$

donc le point $z_1 = z_0 + h$ jouit des mêmes propriétés que z_0.

Je fais ensuite $z = z_1 + k$ puis $k = -\dfrac{f(z_1)}{f'(z_1)}$ et j'ai, en posant $R_2 = \operatorname{mod} f(z_1 + k)$,

$$R_2 < k^2 (m-1) M' < R_1^2 \alpha < R_0^4 \alpha^3 < R_0 (R_0 \alpha)^2 < R_0.$$

donc le point $z_2 = z_1 + h$ jouit des mêmes propriétés que z_1 et z_0 et ainsi de suite. Je forme ainsi une suite de nombres ou points

$$z_0, \quad z_1, \quad z_2, \quad \ldots \quad z_i, \quad \ldots,$$

bien déterminés, tous intérieurs au cercle ρ' et extérieurs aux cercles ρ.

Si pour n fini, on a

$$f(z_i) = 0,$$

le théorème est démontré.

Sinon la suite se prolonge indéfiniment et l'on a

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mod} f(z_0) = R_0,\\
&\operatorname{mod} f(z_1) = R_1 < R_0(R_0\alpha),\\
&\operatorname{mod} f(z_2) = R_2 < R_0(R_0\alpha)^2,\\
&\operatorname{mod} f(z_3) = R_3 < R_0(R_0\alpha)^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\operatorname{mod} f(z_n) = R_n < R_0(R_0\alpha)^n.
\end{aligned}$$

Donc R_n tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment. Or

$$z_n = z_0 - \frac{R_0}{f'(z_0)} - \frac{R_1}{f'(z_1)} - \frac{R_2}{f'(z_2)} - \ldots - \frac{R_{n-1}}{f'(z_{n-1})},$$

qui forme une série lorsque l'on imagine que n croît indéfiniment.

On a, quel que soit p,

$$\operatorname{mod}\left|\frac{R_p}{f'(z_p)}\right| < \frac{R_0}{P}(R_0\alpha)^p;$$

donc la série est absolument convergente et z_n *tend vers une limite finie et bien déterminée* λ, mais $f(z_n)$ tend vers $f(\lambda)$: donc $f(\lambda) = 0$.

L'équation admet donc la racine λ et, par suite, admet m racines.