

A. DE SAINT-GERMAIN

Sur une formule générale de la mesure des volumes

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 12
(1893), p. 291-293

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__291_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE FORMULE GÉNÉRALE DE LA MESURE DES VOLUMES;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Une formule très générale et très simple

$$(1) \quad V = \frac{\Pi}{6} (B + B' + 4 B'').$$

donne, comme on sait, le volume d'un solide S limité par deux faces parallèles à un plan P , lorsque l'expression $\varphi(z)$ de l'aire de la section faite dans S par un plan mené parallèlement à P , à la distance quelconque z , est un polynôme du deuxième ou du troisième degré en z : cette formule est-elle applicable avec d'autres formes de $\varphi(z)$ quand l'une, au moins, des bases de S peut être prise à une distance arbitraire de P ? Je n'ai pas vu que la question ait été posée, mais il est facile d'y répondre négativement dans le cas très général où $\varphi(z)$ pourrait s'exprimer à l'aide d'une série ordonnée suivant les puissances positives de z .

Comptons z à partir de la face de S qui est donnée et soit $2h$ la hauteur du solide; supposons que $\varphi(z)$ soit donné par une série de la forme

$$\varphi(z) = A_0 + \sum_1^{\infty} A_n z^{\alpha_n},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots$ étant des exposants positifs quelconques, mais croissants, et la série convergente tant que z est inférieur à une certaine limite qui n'atteint pas non plus $2h$. On devrait avoir

$$\int_0^{2h} \varphi(z) dz = \frac{h}{3} [\varphi(0) + \varphi(2h) + 4\varphi(h)],$$

ou, en développant $\varphi(z)$ et effectuant les calculs,

$$2A_0h + \sum \frac{2^{\alpha_n+1}}{\alpha_n+1} A_n h^{\alpha_n+1} = \frac{h}{3} \left[6A_0 + \sum A_n (2^{\alpha_n} + 4) h^{\alpha_n} \right].$$

Les coefficients des mêmes puissances de h dans les deux membres doivent être égaux : cela a lieu pour les termes en h ; mais, pour qu'il en soit de même des termes en h^{α_n+1} , par exemple, il faut, si A_n n'est pas

nul, que l'exposant α_n satisfasse à une équation qu'on peut mettre sous la forme

$$F(x) = (5 - x) 2^{x-2} - x - 1 = 0;$$

cette équation a pour racines réelles 1, 2 et 3, et elle ne saurait en avoir plus de trois, car $F''(x)$, égale à

$$\log 2 [(5 - x) \log 2 - 2] e^{x-2},$$

ne s'annule que pour une valeur réelle et finie de x : donc $\varphi(z)$ se réduit nécessairement à la forme

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3.$$

On ne peut d'ailleurs considérer des solides dont les sections auraient des aires infinies.

J'indiquerai une démonstration très élémentaire de la formule (1) dans le cas, qui est le plus important, où $\varphi(z)$ n'est que du second degré. Imaginons un prisme T , dont les bases soient situées dans les plans des bases B, B' de S et deux pyramides T', T'' ayant, l'une sa base, l'autre son sommet dans le plan de B et inversement dans le plan de B' : il est facile de déterminer les bases de T, T', T'' de manière que la somme (algébrique) des aires des sections faites dans les trois solides par tout plan parallèle à P soit égale à l'aire de la section faite dans S . Le volume de S sera égal à la somme des volumes de T, T', T'' et, comme la formule (1) est évidente pour le prisme et les pyramides, elle sera également vraie pour S .
