

WORONTZOFF

## Sur les fonctions symétriques

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 12  
(1893), p. 116-122

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1893\\_3\\_12\\_\\_116\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__116_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

## SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES;

PAR M. WORONTZOFF.

1. En désignant respectivement par  $x_1, x_2, \dots, x_n$   
et par  $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$  les racines des équations

$$F(x) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} - \dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

$$f(x) = b_0 x^m - b_1 x^{m-1} - \dots - b_{m-1} x + b_m = 0 \quad (m \leq n),$$

posons

$$s_q = x_1^q + x_2^q \dots + x_n^q, \quad s'_q = x_1'^q + x_2'^q + \dots + x_m'^q,$$

$$\Lambda_{q-r} = -a_0 \frac{ds_q}{da_r} = \sum_{k=1}^{k=n} a_0 \frac{x_k^{n+q-r-1}}{F(x_k)}$$

$$= \sum_{q-r} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n}, \quad (r \leq q),$$

où la somme  $\sum_{q-r} x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n}$  se rapporte à toutes les solutions entières positives de l'équation

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = q - r.$$

Comme

- (1)  $-qA_q = a_0 s_q + a_1 s_{q-1} + \dots + a_{q-2} s_2 + a_{q-1} s_1$  ( $q > 0$ ),  
 (2)  $a_0 A_q + a_1 A_{q-1} + \dots + a_{q-1} A_1 + a_q A_0 = 0$  ( $A_0 = 1$ ),  
 (3)  $q A_q = A_0 s_q + A_1 s_{q-1} + \dots + A_{q-1} s_2 + A_{q-2} s_1$  (1),

(1) En posant, pour abrégér,

$$= \sum_{k=1}^{k=h} x_k^q, \quad A_q^{(k)} = \sum_q x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_k^{q_k} = \sum_{h=0}^{h=q} A_{q-h}^{(k-1)} x_k^h, \quad u_q^{(k)} = \sum_{h=1}^{h=q} s_h^{(k)} A_{h-q}^{(k)},$$

admettons que, pour toutes les valeurs entières et positives de  $q$ ,  $u_q^{(k)} = q A_q^{(k)}$ : on obtient alors, pour toutes les valeurs entières positives de  $q$ ,

$$u_q^{(k+1)} = \sum_{h=1}^{h=q} s_h^{(k+1)} (A_0^{(k)} x_{k+1}^{q-h} + A_1^{(k)} x_{k+1}^{q-h-1} + \dots + A_{q-h-1}^{(k)} x_{k+1} + A_{q-h}^{(k)})$$

$$= q \sum_{h=0}^{h=q} A_{q-h}^{(k)} x_{k+1}^h = q A_q^{(k+1)}.$$

Comme  $u_q^{(1)} = q A_q^{(1)}$  ou  $x_1^q + x_1^{q-1} x_2 + \dots + x_2 x_1^{q-1} = q x_1^q$ ,  $q$  étant un entier positif quelconque, on a, pour toutes les valeurs entières positives de  $q$ ,

$$u_q^{(2)} = q A_q^{(2)}, \quad \dots, \quad u_q^{(n)} = q A_q^{(n)}.$$

on trouve

$$(4) \quad \begin{cases} s_q = q \sum (-1)^i \frac{(i-1)! a_0^{-i} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} \\ = q \sum (-1)^{i-1} \frac{(i-1)! A_0^{-i} A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}, \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{a_q}{a_0} = \sum \frac{s_1^{\sigma_1} s_2^{\sigma_2} \dots s_q^{\sigma_q}}{(-1)^{\sigma_1} (-2)^{\sigma_2} \dots (-q)^{\sigma_q} \sigma_1! \sigma_2! \dots \sigma_q!} \\ = \sum (-1)^i \frac{i! A_0^{-i} A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \dots A_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!}, \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} A_q = \sum (-1)^i \frac{i! a_0^{-i} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!} \\ = \sum \frac{s_1^{\sigma_1} s_2^{\sigma_2} \dots s_q^{\sigma_q}}{1^{\sigma_1} 2^{\sigma_2} \dots q^{\sigma_q} \sigma_1! \sigma_2! \dots \sigma_q!}, \end{cases}$$

où  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont les solutions entières positives des équations

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \dots + q\sigma_q = q, \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = q,$$

et où  $i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ .

En vertu des relations

$$\frac{dx_k}{da_h} = -\frac{x_k^{n-h}}{F'(x_k)}, \quad \frac{da_k}{ds_r} = -\frac{a_{k-r}}{r}, \quad \frac{dA_k}{ds_r} = \frac{A_{k-r}}{r}$$

$$(k \geq r > 0),$$

on obtient aussi

$$(7) \quad s_q = \frac{1}{(q-1)} \left( a_1 \frac{ds_{q-1}}{da_0} + 2a_2 \frac{ds_{q-1}}{da_1} + 3a_3 \frac{ds_{q-1}}{da_2} + \dots + na_n \frac{ds_{q-1}}{da_{n-1}} \right)$$

$$(8) \quad \begin{cases} a_q = \frac{1}{q} \left[ -s_1 a_{q-1} + s_2 \frac{da_{q-1}}{ds_1} + 2s_3 \frac{da_{q-1}}{ds_2} \right. \\ \left. + 3s_4 \frac{da_{q-1}}{ds_3} + \dots + (q-1)s_q \frac{da_{q-1}}{ds_{q-1}} \right], \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} A_q = \frac{1}{q} \left[ s_1 A_{q-1} + s_2 \frac{dA_{q-1}}{ds_1} + 2s_3 \frac{dA_{q-1}}{ds_2} \right. \\ \left. + 3s_4 \frac{dA_{q-1}}{ds_3} + \dots + (q-1)s_q \frac{dA_{q-1}}{ds_{q-1}} \right]. \end{cases}$$

(*Nouvelles Annales*, p. 328; 1891.)

## 2. Prenons l'équation

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(a_n + y) &= [\gamma + F(x'_1)][\gamma + F(x'_2)] \dots [\gamma + F(x'_m)] \\ &= \gamma^m + \frac{D^{m-1} a_n \Phi(a_n)}{1.2 \dots (m-1)} \gamma^{m-1} + \dots \\ &\quad + D a_n \Phi(a_n) \gamma + \Phi(a_n) \\ &= (a_n + \gamma)^m + C_1 (a_n + \gamma)^{m-1} \\ &\quad + C_2 (a_n + \gamma)^{m-2} + \dots + C_{m-1} (a_n + \gamma) + C_m = 0, \end{aligned} \right.$$

où

$$C_r = \left[ \frac{D^{m-r} a_n \Phi(a_n)}{1.2 \dots (m-r)} \right] a_n = 0;$$

alors, d'après la formule (5), on a

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(a_n) &= F(x'_1) F(x'_2) \dots F(x'_m) \\ &= \sum \frac{S_1^{\sigma_1} S_2^{\sigma_2} \dots S_m^{\sigma_m}}{(-1)^{\sigma_1} (-2)^{\sigma_2} \dots (-m)^{\sigma_m} \sigma_1! \sigma_2! \dots \sigma_m!} \\ &\quad (\sigma_1 + 2\sigma_2 + \dots + m\sigma_m = m) \end{aligned} \right.$$

et aussi

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(a_n) &= F(x'_1) F(x'_2) \dots F(x'_m) \\ &= a_n^m + C_1 a_n^{m-1} + C_2 a_n^{m-2} + \dots + C_{m-1} a_n + C_m, \end{aligned} \right.$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} C_r &= \frac{\Phi^{(m-r)}(0)}{1.2 \dots (m-r)} \\ &= \sum \frac{S_1^{\sigma_1} S_2^{\sigma_2} \dots S_r^{\sigma_r}}{(-1)^{\sigma_1} (-2)^{\sigma_2} \dots (-r)^{\sigma_r} \sigma_1! \sigma_2! \dots \sigma_r!} \\ &\quad (\sigma_1 + 2\sigma_2 + \dots + r\sigma_r = r) \end{aligned} \right.$$

ou

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} S_q &= (-1)^q \sum_{k=1}^{k=m} [F(x'_k)]^q \\ &= (-1)^q \sum \frac{q!}{x_0! x_1! \dots x_n!} a_0^{x_0} a_1^{x_1} \dots a_n^{x_n} S'_{x_{n-1} + 2x_{n-2} + \dots + nx_0} \\ &\quad (x_0 + \dots + x_n = q), \end{aligned} \right.$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} S'_q &= (-1)^q \sum_{k=1}^{k=m} [F(x'_k) - a_n]^q \\ &= (-1)^q \sum \frac{q!}{x_0! x_1! \dots x_{n-1}!} a_0^{x_0} a_1^{x_1} \dots a_{n-1}^{x_{n-1}} S'_{x_{n-1} + 2x_{n-2} + \dots + nx_0} \\ &\quad (x_0 + \dots + x_{n-1} = q), \end{aligned} \right.$$



ou

$$\frac{d\Phi_n(a_n)}{da_n} = -\frac{1}{b_m} \left[ b_0 \frac{d\Phi_n(a_n)}{da_{n-m}} + b_1 \frac{d\Phi_n(a_n)}{da_{n-m+1}} + \dots + b_{m-1} \frac{d\Phi_n(a_n)}{da_{n-1}} \right],$$

ou, plus généralement,

$$\frac{d^r \Phi_n(a_n)}{da_n^r} = -\frac{1}{b_m} \left[ b_0 \frac{d}{da_{n-m}} \frac{d^{r-1} \Phi_n(a_n)}{da_n^{r-1}} + b_1 \frac{d}{da_{n-m+1}} \frac{d^{r-1} \Phi_n(a_n)}{da_n^{r-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{d}{da_{n-1}} \frac{d^{r-1} \Phi_n(a_n)}{da_n^{r-1}} \right],$$

on trouve

$$\begin{aligned} C_{n-1} &= \left[ \frac{d\Phi_n(a_n)}{da_n} \right]_{a_n=0} \\ &= -\frac{1}{b_m} \left( b_0 \frac{dC_m}{da_{n-m}} + b_1 \frac{dC_m}{da_{n-m+1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dC_m}{da_{n-1}} \right), \\ C_{n-2} &= \frac{1}{1.2} \left[ \frac{d^2 \Phi_n(a_n)}{da_n^2} \right]_{a_n=0} \\ &= -\frac{1}{2b_m} \left( b_0 \frac{dC_{m-1}}{da_{n-m}} + b_1 \frac{dC_{m-1}}{da_{n-m+1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dC_{m-1}}{da_{n-1}} \right), \\ &\dots\dots\dots, \\ C_{n-r} &= \frac{1}{1.2\dots r} \left[ \frac{d^r \Phi_n(a_n)}{da_n^r} \right]_{a_n=0} \\ &= -\frac{1}{rb_m} \left( b_0 \frac{dC_{m-r+1}}{da_{n-m}} + b_1 \frac{dC_{m-r+1}}{da_{n-m+1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dC_{m-r+1}}{da_{n-1}} \right), \\ &\dots\dots\dots, \\ C_1 &= \frac{1}{1.2\dots(m-1)} \left[ \frac{d^{m-1} \Phi_n(a_n)}{da_n^{m-1}} \right]_{a_n=0} \\ &= -\frac{1}{(m-1)b_m} \left( b_0 \frac{dC_2}{da_{n-m}} + b_1 \frac{dC_2}{da_{n-m+1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dC_2}{da_{n-1}} \right). \end{aligned}$$

En désignant respectivement par  $\Delta_n$  et  $\Delta_{n-1}$  les discriminants des équations  $F_n(x) = 0$ ,  $F_{n-1}(x) = 0$ , et en faisant

$$\begin{aligned} m &= n-1, & b_0 &= na_0, & b_1 &= (n-1)a_1, & \dots, \\ & & b_{n-2} &= 2a_{n-2}, & b_{n-1} &= a_{n-1}, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \Pi(x_1 - x_2)^2 \\ &= (-1)^n \left(\frac{n-1}{2}\right) \frac{n^n}{a_0^{n-1}} (F x'_1) F(x'_2) \dots F(x'_{n-1}) \\ &= (-1)^n \left(\frac{n-1}{2}\right) \frac{n^n}{a_0^{n-1}} (a_n^{n-1} + C_1 a_n^{n-2} + C_2 a_n^{n-3} + \dots + C_{n-2} a_n - C_{n-1}) \\ &= C'_0 a_n^{n-1} + C'_1 a_n^{n-2} + C'_2 a_n^{n-3} + \dots + C'_{n-2} a_n + C'_{n-1},\end{aligned}$$

ou

$$C'_{n-1} = (\Delta_n)_{a_n=0} = \frac{a_{n-1}^2}{a_0^2} \Delta_{n-1},$$

et, en vertu de la relation

$$\sum_{l=1}^{l=n} (n-k+1) a_{k-1} \frac{d\Delta_n}{da_l} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\Delta_n}{dx_k} = 0$$

ou

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta_n}{da'_n} &= -\frac{1}{a_{n-1}} \sum_{l=1}^{l=n-1} (n-k+1) a_{k-1} \frac{d}{da_k} \frac{d^{n-1}\Delta_n}{da'_{n-1}}, \\ C'_{n-2} &= \left(\frac{d\Delta_n}{da_n}\right)_{a_n=0} \\ &= -\frac{1}{a_{n-1}} \left[ na_0 \frac{dC'_{n-1}}{da_1} + (n-1)a_1 \frac{dC'_{n-1}}{da_2} + \dots + 2a_{n-2} \frac{dC'_{n-1}}{da_{n-1}} \right], \\ C'_{n-1} &= \frac{1}{1,2} \left(\frac{d^2\Delta_n}{da_n^2}\right)_{a_n=0} \\ &= -\frac{1}{2a_{n-1}} \left[ na_0 \frac{dC'_{n-2}}{da_1} + (n-1)a_1 \frac{dC'_{n-2}}{da_2} + \dots + 2a_{n-2} \frac{dC'_{n-2}}{da_{n-1}} \right], \\ &\dots\dots\dots, \\ C'_1 &= \frac{1}{1,2,\dots,(n-2)} \left(\frac{d^{n-2}\Delta_n}{da_n^{n-2}}\right)_{a_n=0} \\ &= -\frac{1}{(n-2)a_{n-1}} \left[ na_0 \frac{dC'_2}{da_1} + (n-1)a_1 \frac{dC'_2}{da_2} + \dots + 2a_{n-2} \frac{dC'_2}{da_{n-1}} \right], \\ C'_0 &= (-1)^n \left(\frac{n-1}{2}\right) \frac{n^n}{a_0^{n-1}}.\end{aligned}$$

(J.-A. SERRE, *Cours d'Algebre superieure*, t. I,  
p. 461; 1885)