

F. FARJON

Solution d'une question de géométrie donnée au concours général en 1887

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 11
(1892), p. 535-537

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__535_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION D'UNE QUESTION DE GEOMETRIE
DONNÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL EN 1887;**

PAR M. F. FARJON.

Il s'agit de trouver la condition à laquelle doivent satisfaire deux coniques F et f pour qu'un quadrilatère puisse être à la fois circonscrit à la première et inscrit dans la seconde.

Nous nous servirons des notations de M. Salmon.

Supposons la condition réalisée et soient L, M, N les diagonales du quadrilatère, les quatre côtés seront $L \pm M \pm N$. L'équation générale des coniques inscrites est

$$\Phi = \mu^2 L^2 - \mu(L^2 + M^2 - N^2) + M^2 = 0 \quad (1)$$

et celle des coniques circonscrites

$$\begin{aligned} \varphi &= (L + M + N)(L + M - N) \\ &\quad - \nu(L - M + N)(L - M - N) = 0. \end{aligned}$$

Si ces deux équations comprennent les deux courbes F et f , rapportées au triangle de référence LMN , en égalant à zéro les deux discriminants de $f - \lambda F$ et de $\varphi - \lambda \Phi$, on obtiendra deux équations en λ qui devront avoir les mêmes racines.

Soient $\Delta_1, \Delta'_1, \Theta_1, \Theta'_1$ les invariants du système $\Phi \varphi$, $\Delta, \Delta', \Theta, \Theta'$ ceux du système Ff , on a

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\mu^2(\mu-1)^2, \\ \Delta'_1 &= -4\nu(\nu-1), \\ \Theta_1 &= -2\mu(\mu-1)^2(\nu-1), \\ \Theta'_1 &= -(\mu-1)^2(\nu-1)^2 - 4\mu\nu. \end{aligned}$$

(1) SALMON, trad. VAUCHERET, *Sect. con.*, § 287.

par conséquent

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\theta}{\Delta} = \frac{2(\nu-1)}{\mu}, \\ \frac{\theta'}{\Delta} = \frac{(\mu-1)^2(\nu-1)^2 + 4\mu\nu}{\mu^2(\mu-1)^2}, \\ \frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{4\nu(\nu-1)}{\mu^2(\mu-1)^2} \end{array} \right.$$

et en éliminant entre ces trois relations les paramètres μ et ν , on aura la condition cherchée.

On tire de la première

$$\mu = \frac{2(\nu-1)\Delta}{\theta},$$

de la troisième

$$(\mu-1)^2 = \frac{\nu\theta^2}{\Delta\Delta'(\nu-1)};$$

substituant dans la seconde, on trouve finalement

$$(2) \quad 4\Delta\theta\theta' = \theta^3 + 8\Delta^2\Delta'.$$

Cette condition est évidemment nécessaire, puisque, si elle n'était pas remplie, les trois relations (1) seraient incompatibles. Je dis de plus qu'elle est suffisante.

D'un point Λ pris sur f menons les deux tangentes à F , lesquelles rencontrent f aux points B et C . De ces points menons deux nouvelles tangentes à F , lesquelles se coupent en D ; il faut prouver que, si la condition (2) est remplie, le point D est aussi sur f .

Rapportons F et f au triangle de référence LMN formé par les diagonales du quadrilatère $ABCD$, F prendra la forme Φ et, pour identifier f et φ , on aura cinq conditions, qui se réduisent à deux, les deux courbes ayant déjà les trois points A , B , C communs. L'équation (2) qui existe, par hypothèse, pour les deux systèmes $\Phi\varphi$ Φf permet de satisfaire à une quatrième condition. La cinquième déterminera la valeur de ν . C. Q. F. D.

Remarquons que le point A est un point quelconque de f , d'où il suit que, lorsque la condition (2) est remplie, il existe une infinité de quadrilatères circonscrits à F et inscrits à f . Poncelet a depuis longtemps établi cette propriété pour un polygone quelconque.

Application. — L'ellipse

$$F = a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0$$

et le cercle

$$f = (x - c)^2 + y^2 - 2(a^2 + c^2) = 0 \quad (1).$$

On a

$$\begin{aligned} \Delta &= -a^4 b^4, & \Delta' &= -2(a^2 + c^2), \\ \Theta &= -4a^4 b^2, & \Theta' &= -2a^2 b^2 - 4a^4 + b^4, \end{aligned}$$

et la condition (2) est vérifiée.