

J. LEMAIRE

Solution géométrique de la question de mathématiques du concours de l'École polytechnique en 1891

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 11 (1892), p. 49-60

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__49_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES
DU CONCOURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1891 ;**

PAR M. J. LEMAIRE,

Ancien élève de l'École Polytechnique,
Professeur au lycée de Douai.

On donne une parabole P ; on porte à partir de chacun de ses points et dans les deux sens, sur une parallèle à une direction fixe Δ , des longueurs égales à la distance de ce point au foyer de la parabole.

1° Trouver le lieu des extrémités de ces longueurs ; montrer qu'il se compose de deux paraboles P_1 et P_2 et donner la raison de ce dédoublement ;

2° Démontrer que les axes des paraboles P_1 et P_2 sont perpendiculaires l'un sur l'autre, qu'ils pivotent autour d'un point indépendant de la direction Δ , et que, quelle que soit cette direction, la somme des carrés des paramètres des deux paraboles est constante.

3° Trouver et construire le lieu décrit par les sommets des paraboles P_1 et P_2 lorsqu'on fait varier la direction Δ .

I. Soient (*fig. 1*)

F le foyer de la parabole donnée P ,

$X'X$ son axe,

$Y'Y$ sa directrice,

θ l'angle aigu de Δ avec $X'X$,

M un point quelconque de la courbe,

M_1 le point obtenu en prenant $MM_1 = MF$ sur la parallèle à Δ , menée par M ,

MD la perpendiculaire menée de M à $Y'Y$.

M est le centre d'un cercle tangent en D à $Y'Y$ et passant par F et M_1 .

Joignons FD , FM_1 , DM_1 ; nous avons

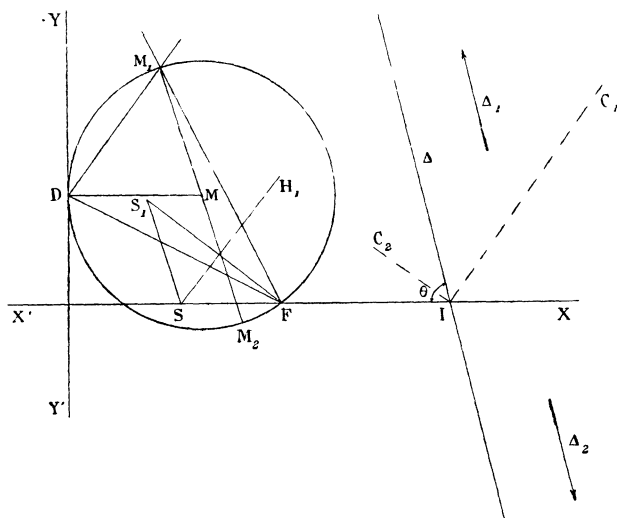
$$\widehat{YDM_1} = \frac{\widehat{DMM_1}}{2} = \frac{\theta}{2}$$

et aussi

$$\widehat{DFM_1} = \frac{\theta}{2}.$$

DM_1 et FM_1 sont les rayons correspondants de deux faisceaux homographiques; M_1 décrit donc une conique

Fig. 1.



passant par F et par le point à l'infini dans la direction DM_1 , c'est-à-dire dans la direction de la bissectrice IC_1 de $\widehat{\Delta IX}$. Le point M_1 ne sera rejeté à l'infini que si DM_1 est elle-même à l'infini; la conique lieu de M_1 a donc

une asymptote rejetée à l'infini; c'est, par suite, une parabole : appelons-la P_1 .

Soit M_2 le point obtenu en prenant $MM_2 = MF$ sur la parallèle à Δ_2 menée par M . On verrait, comme ci-dessus, que le lieu de M_2 est une parabole P_2 dont la direction asymptotique est la bissectrice IC_2 de $\widehat{\Delta IX'}$.

II. Les diamètres des paraboles P_1 et P_2 étant respectivement parallèles aux bissectrices des angles $\widehat{\Delta IX}$ et $\widehat{\Delta IX'}$ ont des directions rectangulaires.

Soient S le sommet de P , S_1 le point correspondant de P_1 .

Le diamètre de P_1 qui passe par S est la bissectrice SH_1 de $\widehat{S_1 SF}$. Le triangle SS_1F étant isocèle, les points F et S_1 sont symétriques par rapport à ce diamètre; comme ces deux points appartiennent à P_1 , SH_1 est l'axe même de cette parabole.

Ceci démontre que l'axe de P_1 passe par le sommet de la parabole donnée; il en est de même de l'axe de P_2 .

Soient (*fig. 2*) AB la corde de P menée par F parallèlement à Δ , C le pôle de cette droite par rapport à P : ce point est sur la directrice $Y'Y$ et CA et CB sont rectangulaires; CF et AB sont aussi rectangulaires.

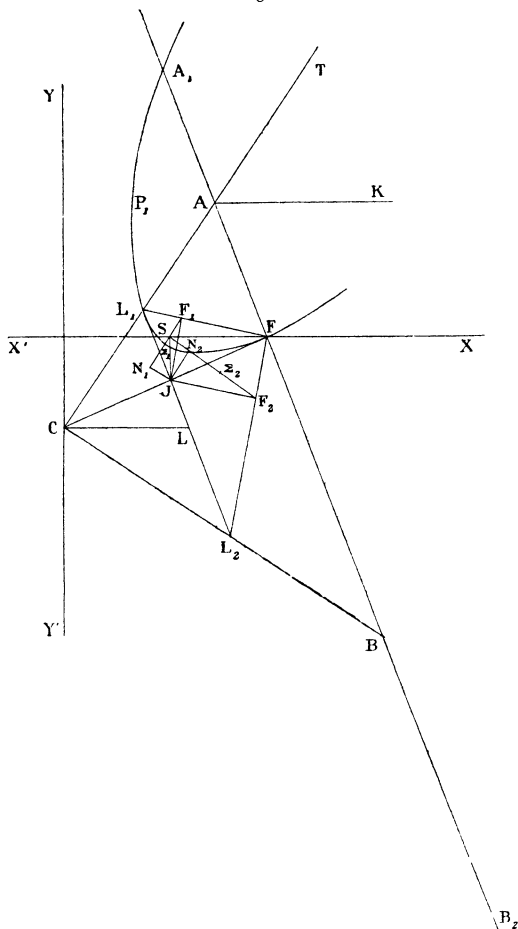
Soit AK la parallèle à $X'X$ menée par A .

La tangente en A à P , étant bissectrice de $\widehat{A_1 AK}$, est parallèle à IC_1 et, par suite, diamètre de P_1 ; le point de P_1 situé sur ce diamètre est le milieu L_1 de CA : c'est le point correspondant au point de contact L de P et de la tangente à cette courbe parallèle à Δ .

L_1 étant le milieu de CA , le point C est le pôle de

A_1F par rapport à P_1 ; il en résulte que CF est tangente à P_1 au point F .

Fig. 2.



C est de même le pôle de B_2F par rapport à P_2 et CF est tangente à P_2 au point F .

Nous voyons que *les paraboles P_1 et P_2 sont tan-*

gentes en F, et que le point C a la même polaire par rapport aux trois paraboles P, P₁, P₂.

Si L₂ est le milieu de CB, L₁L₂ est tangente à la fois aux trois courbes.

Soit J le point commun à L₁L₂ et à CF; ces deux droites sont perpendiculaires.

Donc J appartient à la directrice de chacune des paraboles P₁ et P₂; comme d'ailleurs J est sur la tangente à P en son sommet, puisque ce point est la projection de F sur une tangente à cette parabole, on en conclut que *le lieu du point de rencontre des directrices de P₁ et P₂, quand Δ varie, est la tangente à la parabole donnée en son sommet.*

Ces diverses remarques permettent de terminer facilement la question :

J appartenant à la directrice de P₁ et la polaire de ce point, par rapport à cette courbe, étant L₁F, le foyer de P₁ est le pied F₁ de la perpendiculaire menée de J à L₁F.

Joignons F₁S : cette droite est l'axe de P₁ et est parallèle à CA; la perpendiculaire JN₁ menée de J à FS est la directrice de P₁.

De même, le foyer de P₂ est le pied F₂ de la perpendiculaire menée de J à FL₂, l'axe de P₂ est F₂S et sa directrice la perpendiculaire JN₂ à SF₂.

JSF₁FF₂ est inscriptible dans le cercle de diamètre JF.

Les triangles JN₁F₁, JN₂F₂, JSF sont semblables et donnent

$$\frac{N_1 F_1}{J F_1} = \frac{N_2 F_2}{J F_2} = \frac{S F}{J F},$$

ou, en désignant par p, p_1, p_2 les paramètres des paraboles P, P₁, P₂,

$$\frac{p_1}{J F_1} = \frac{p_2}{J F_2} = \frac{p}{2 J F},$$

d'où

$$p_1^2 + p_2^2 = \frac{p^2}{4} \times \frac{\overline{JF_1}^2 + \overline{JF_2}^2}{\overline{JF}^2}.$$

$JF_1 F F_2$ est un rectangle; par suite,

$$\overline{JF_1}^2 + \overline{JF_2}^2 = \overline{JF}^2.$$

Par conséquent,

$$p_1^2 + p_2^2 = \frac{p^2}{4} = \text{const.}$$

III. Le sommet de P_1 est le milieu Σ_1 de $N_1 F_1$. Cherchons le lieu de Σ_1 quand Δ varie. Posons

$$S \Sigma_1 = -\varphi, \quad F_1 S F = \omega,$$

et cherchons une relation entre φ , ω , p : cette relation sera l'équation du lieu cherché en coordonnées polaires, l'origine étant S et la direction positive de l'axe polaire SX .

Nous avons successivement

$$S \Sigma_1 = \frac{1}{2} (S N_1 - S F_1),$$

$$\begin{aligned} S N_1 &= S J \sin \omega = S F \cot \widehat{S J F} \sin \omega \\ &= \frac{p}{2} \cot \widehat{Y C F} \sin \omega = \frac{p}{2} \cot 2 \widehat{Y C A} \sin \omega \\ &= \frac{p}{2} \cot 2 \left(\frac{\pi}{2} - \omega \right) \sin \omega = -\frac{p}{2} \cot 2 \omega \sin \omega. \end{aligned}$$

Le triangle $S F_1 F$ donne

$$\begin{aligned} \frac{S F_1}{S F} &= \frac{\sin \widehat{S F F_1}}{\sin \widehat{S F_1 F}} = \frac{\sin (\widehat{L_1 F C} - \widehat{S F J})}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \widehat{S F_1 J} \right)} \\ &= \frac{\sin (\widehat{L_1 C Y} - \widehat{J C L})}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \widehat{S F J} \right)} = \frac{\sin (\widehat{L_1 C Y} - \widehat{J C L})}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \widehat{J C L} \right)}. \end{aligned}$$

Comme

$$\widehat{L_1 C Y} = \frac{\pi}{2} - \widehat{L_1 C L} = \frac{\pi}{2} - \omega$$

et

$$\widehat{J C L} = \frac{\pi}{2} - \widehat{L_1 C Y} = 2\omega - \frac{\pi}{2},$$

on en conclut

$$\frac{SF_1}{SF} = \frac{\sin \left[\left(\frac{\pi}{2} - \omega \right) - \left(2\omega - \frac{\pi}{2} \right) \right]}{\sin 2\omega} = \frac{\sin 3\omega}{\sin 2\omega},$$

d'où

$$SF_1 = \frac{P}{2} \frac{\sin 3\omega}{\sin 2\omega}.$$

Remplaçant, dans l'expression de $S\Sigma_1$, SN_1 et SF_1 par leurs valeurs, nous obtenons

$$S\Sigma_1 = \frac{P}{4} \left[-\cot 2\omega \sin \omega - \frac{\sin 3\omega}{\sin 2\omega} \right].$$

Remplaçant $S\Sigma_1$ par $-\rho$ et simplifiant, nous avons

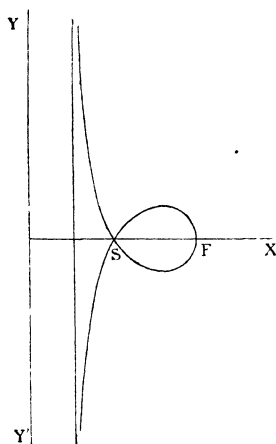
$$\rho = \frac{P}{4} \times \frac{2 - 3 \sin^2 \omega}{\cos \omega}.$$

Telle est l'équation du lieu de Σ_1 , qui est en même temps le lieu de Σ_2 . Ce lieu est une cubique unicursale ayant pour point double le point S; on la construit sans difficulté; elle a la forme d'une strophoïde, passe par F, et admet pour asymptote une parallèle à la directrice de P, équidistante de cette droite et de S (*fig. 3*).

Remarques diverses. — 1^o Nous avons démontré que P_1 et P_2 sont tangentes en F; la tangente commune en ce point est la perpendiculaire à Δ ; l'autre tangente commune réelle est parallèle à Δ .

2° Le point C (*fig. 2*), ayant même polaire par rapport aux paraboles P_1 et P_2 , est le point de rencontre de deux sécantes communes à ces coniques; l'une de ces sécantes est CF; il est facile de trouver l'autre.

Fig. 3.



P_1 et P_2 peuvent, en effet, être considérées comme des coniques inscrites dans une troisième, formée de la tangente commune $L_1 L_2$ et de la droite de l'infini du plan.

D'après un théorème connu, les cordes de contact de P_1 et P_2 avec cette troisième conique et les sécantes communes à P_1 et P_2 forment un faisceau harmonique; or ces cordes de contact sont les diamètres CA et CB de P_1 et P_2 , donc la sécante commune cherchée est la polaire de CF

par rapport à l'angle $\widehat{ACB}$, c'est-à-dire la directrice de P; les points correspondants communs à P_1 et P_2 sont imaginaires. On verrait aussi facilement que P et P_1 se coupent en deux points réels, et que la droite qui les joint passe par C; de même pour P et P_2 .

3° Nous avons trouvé, dans la troisième partie,

$$SF_1 = \frac{p}{2} \frac{\sin 3\omega}{\sin 2\omega}.$$

Le lieu des foyers des paraboles P_1 et P_2 a pour équation

$$\rho = \frac{p}{2} \frac{\sin 3\omega}{\sin 2\omega},$$

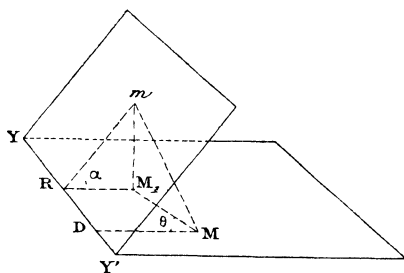
c'est une courbe de la même famille que celle que nous avons construite plus haut.

Il serait facile de démontrer quelques propriétés de ces courbes en remarquant qu'elles sont des transformées de coniques par rayons vecteurs réciproques.

Voici une autre solution plus concise et fort élégante :

I. Soient YY' (*fig. 4*) la directrice de P , M un point quelconque de la courbe, MM_1 la parallèle à Δ_1 mené par M , MD

Fig. 4.



la perpendiculaire menée de M à $Y'Y$, θ l'angle aigu de Δ avec l'axe de P ; nous avons $MM_1 = MD$.

Par $Y'Y$, faisons passer un plan faisant avec le plan de P un angle aigu quelconque α ; soit m le point commun à ce plan

et à la perpendiculaire en M_1 au plan de P , mR perpendiculaire à $Y'Y$; M_1R est aussi perpendiculaire à cette droite. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \widehat{\text{tang } m M M_1} &= \frac{m M_1}{M_1 M} = \frac{M_1 R \text{ tang } \alpha}{M_1 M} \\ &= \frac{M_1 D \sin \frac{\theta}{2} \text{ tang } \alpha}{M_1 M} = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \text{ tang } \alpha = \text{const.} \end{aligned}$$

Comme de plus le plan $M m M_1$ a une direction fixe, nous voyons que $M m$ est parallèle à une direction fixe.

Le lieu de m est une projection oblique de P , c'est-à-dire une parabole; le lieu de M_1 est la projection orthogonale du précédent, c'est donc une parabole : soit P_1 .

Les tangentes à ces trois courbes aux points correspondants M, m, M_1 coupent $Y'Y$ au même point: en ce point passe aussi la tangente en M_2 à la parabole P_2 .

Ainsi les tangentes aux paraboles P, P_1, P_2 aux trois points correspondants M, M_1, M_2 concourent sur la directrice de P .

Cette remarque va nous permettre de terminer simplement la question.

II. Soient S_1 et S_2 (*fig. 5*) les points de P_1 et P_2 correspondant au sommet S de P : les tangentes en S, S_1, S_2 à P, P_1, P_2 devant se couper sur la directrice de P sont parallèles: les normales en S_1 à P_1 , en S_2 à P_2 sont perpendiculaires à cette directrice.

On démontre facilement que les axes de P_1 et P_2 sont les bissectrices de $\widehat{S_1 S F}$ et $\widehat{S_2 S F}$. Soit $S_1 N_1$ la normale en S_1 à P_1 ; $I_1 N_1$ est la sous-normale; et comme I_1 est le milieu de $S N_1$, on a

$$p_1 = I_1 S,$$

en désignant par p_1 le paramètre de P_1 .

On a de même

$$p_2 = I_2 S.$$

Par suite

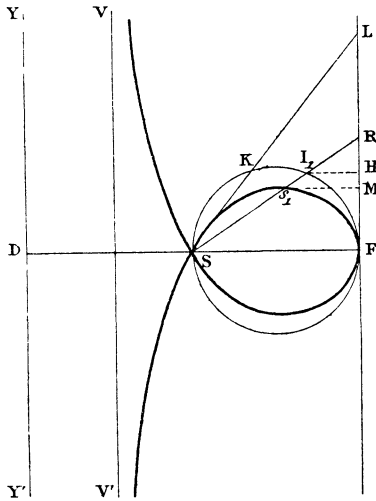
$$p_1^2 + p_2^2 = \overline{S F}^2 = \text{const.}$$

La propriété énoncée plus haut permet de voir que les pa-

diculaire en F à SF; on prend $I_1 s_1 = \frac{I_1 R}{2}$ sur $I_1 S$: la courbe lieu de s_1 est la courbe lieu des sommets de P_1 et P_2 .

La courbe se construit alors par points sans difficulté (fig. 6) : Elle passe en F où elle est tangente à FR, a en S un point

Fig. 6.



double dont les tangentes sont la droite SL, telle que $SK = \frac{SL}{3}$ et sa symétrique par rapport à SF.

Elle a une asymptote parallèle à $Y'Y$; soient $I_1 H$ et $s_1 M$ perpendiculaires à FR,

$$\frac{s_1 M}{I_1 H} = \frac{s_1 R}{I_1 R} = \frac{3}{2}.$$

La distance du point à l'infini de la courbe à FL est donc égale à $\frac{3}{2} SF$; autrement dit, l'asymptote est la droite VV' parallèle à $Y'Y$ et équidistante de cette droite et de S.

X.