

E. AMIGUES

Démonstration analytique du théorème de M. Rouché relatif à un système d'équations algébriques du premier degré

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 11
(1892), p. 47-48

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__47_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**DÉMONSTRATION ANALYTIQUE DU THÉOREME DE M. ROUCHÉ
RELATIF A UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES DU
PREMIER DEGRÉ;**

PAR M. E. AMIGUES.

Soit à résoudre m équations à n inconnues, et soit p l'ordre du déterminant principal. Le nombre des déterminants caractéristiques est $m - p$. S'il est nul, on ajoutera au système une équation à coefficients nuls, qui n'altérera pas les solutions du système.

Supposons que l'on place en haut les p équations qui fournissent le déterminant principal, et représentons par δ_{p+i} le déterminant caractéristique fourni par l'équation de rang $p + i$.

En ordonnant δ_{p+1} par rapport aux éléments de sa dernière colonne, savoir les termes indépendants $g_1, g_2, \dots$, on obtient

$$\delta_{p+1} = G_1 g_1 + G_2 g_2 + \dots + G_{p+1} g_{p+1}.$$

g_{p+1} n'étant pas nul, puisqu'il est le déterminant principal.

Multipliant les $p+1$ premières équations respectivement par $G_1, G_2, \dots, G_{p+1}$, et ajoutant, on a une équation qui peut remplacer la $(p+1)^{\text{ième}}$ sans altérer les solutions du système (parce que $G_{p+1} \neq 0$).

Dans cette équation, le coefficient d'une inconnue quelconque est un déterminant d'ordre $p+1$ formé avec les éléments du rectangle et par conséquent est nul. On voit alors facilement que l'équation qui remplace la $(p+1)^{\text{ième}}$ est

$$\delta_{p+1} = 0.$$

De même, dans ce nouveau système, on a le droit de remplacer la $(p+2)^{\text{ième}}$ des équations proposées par

$$\delta_{p+2} = 0,$$

et ainsi de suite.

Donc : tout système du premier degré est équivalent à un second système formé en prenant les équations qui fournissent le déterminant principal et en égalant à 0 les déterminants caractéristiques qui correspondent à toutes les autres équations.

On déduit de là les conclusions suivantes :

1^o Si les déterminants caractéristiques ne sont pas tous nuls, pas de solution.

2^o S'ils sont tous nuls, le système se réduit aux p premières équations proposées, et l'on peut en tirer les p inconnues qui correspondent au déterminant principal, par la règle de Cramer, en fonction des autres inconnues, au nombre de $n-p$ qui demeurent arbitraires. Si aucun des déterminants d'ordre p fournis avec les éléments du rectangle n'est nul, le nombre de manières dont on peut appliquer la règle de Cramer est visiblement $C_m^p C_n^p$.