

WORONTZOFF

Sur l'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 11
(1892), p. 291-299

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__291_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ÉLIMINATION;
PAR M. WORONTZOFF.

Soient

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \\ f(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m = 0, \end{array} \right.$$

$(m \leq n)$

deux équations algébriques dont les racines sont respectivement $x_1, x_2, \dots, x_n$ et $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$. En posant, pour abréger,

$$(2) \quad \alpha_0 r^p + \alpha_1 r^{p-1} + \dots + \alpha_{p-1} r + \alpha_p = F_p(r),$$

$$(3) \quad b_0 r^q + b_1 r^{q-1} + \dots + b_{q-1} r + b_q = f_q(r),$$

$$F_0(r)x^{n-1} + F_1(r)x^{n-2} + \dots + F_{n-2}(r)x + F_{n-1}(r) = \Phi(x, r),$$

$$f_0(r)x^{m-1} + f_1(r)x^{m-2} + \dots + f_{m-2}(r)x + f_{m-1}(r) = \varphi(x, r),$$

au moyen des formules

$$\begin{aligned} F(x) - F(r) &= (x - r) \left[\alpha_0 \frac{(x^n - r^n)}{x - r} + \alpha_1 \frac{(x^{n-1} - r^{n-1})}{x - r} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{n-2} \frac{(x^2 - r^2)}{x - r} + \alpha_{n-1} \right]^{(1)} \\ &= (x - r) [F_0(r)x^{n-1} + F_1(r)x^{n-2} + \dots \\ &\quad + F_{n-2}(r)x + F_{n-1}(r)] \\ &= (x - r) \Phi(x, r), \\ f(x) - f(r) &= (x - r) [f_0(r)x^{m-1} + f_1(r)x^{m-2} + \dots \\ &\quad + f_{m-2}(r)x + f_{m-1}(r)] \\ &= (x - r) \varphi(x, r), \end{aligned}$$

on obtient, pour toutes les valeurs de x et de r ,

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{F(x) - F(r)}{f(x) - f(r)} \\ &= \frac{F_0(r)x^{n-1} + F_1(r)x^{n-2} + \dots + F_{n-2}(r)x + F_{n-1}(r)}{f_0(r)x^{m-1} + f_1(r)x^{m-2} + \dots + f_{m-2}(r)x + f_{m-1}(r)} \\ &= \frac{\Phi(x, r)}{\varphi(x, r)} \end{aligned} \right.$$

ou

$$(5) \quad F(x)\varphi(x, r) - f(x)\Phi(x, r) = F(r)\varphi(x, r) - f(r)\Phi(x, r),$$

ou, en comparant les coefficients des mêmes puissances

(¹) Ou

$$F(x) - F(r) = (x - r) F'(r) + \frac{(x - r)^2}{1 \cdot 2} F''(r) + \dots + \frac{(x - r)^n}{1 \cdot 2 \dots n} F^{(n)}(r).$$

de x , dans les deux membres de l'égalité précédente (5),

$$\begin{aligned}
 & \alpha_0[-f_0(r)] + b_0 F_0(r) = 0, \\
 & \alpha_1[-f_0(r)] + \alpha_0[-f_1(r)] + b_1 F_0(r) + b_0 F_1(r) = 0, \\
 & \dots \dots \dots, \\
 & \sum_{k=0}^{k=h} \alpha_{h-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=h} b_{h-k} F_k(r) = 0, \\
 & \dots \dots \dots, \\
 & \sum_{k=0}^{k=m-1} \alpha_{m-1-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=m-1} b_{m-1-k} F_k(r) = 0, \\
 & \sum_{k=0}^{k=m-1} \alpha_{m-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=m} b_{m-k} F_k(r) = F_0(r) f(r), \\
 & \dots \dots \dots, \\
 & \sum_{k=0}^{k=m-1} \alpha_{m+i-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=m} b_{m-k} F_{i+k}(r) = F_i(r) f(r), \\
 & \dots \dots \dots, \\
 & \sum_{k=0}^{k=m-1} \alpha_{n-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=m-1} b_{m-k} F_{n-m+k}(r) \\
 & \quad = F_{n-m}(r) f(r) - f_0(r) F(r), \\
 & \dots \dots \dots, \\
 & \sum_{k=h}^{k=m-1} \alpha_{n+h-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=h}^{k=m-1} b_{m+h-k} F_{n-m+k}(r) \\
 & \quad = F_{n-m+h}(r) f(r) - f_h(r) F(r), \\
 & \dots \dots \dots, \\
 & \alpha_n[-f_{m-2}(r)] + \alpha_{n-1}[-f_{m-1}(r)] \\
 & \quad + b_m F_{n-2}(r) + b_{m-1} F_{n-1}(r) \\
 & \quad = f(r) F_{n-2}(r) - f_{m-2}(r) F(r), \\
 & \alpha_n[-f_{m-1}(r)] + b_m F_{n-1}(r) \\
 & \quad = F_{n-1}(r) f(r) - f_{m-1}(r) F(r),
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

où

$$h = 0, 1, 2, \dots, m-1; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-m-1.$$

Si les équations données (1) ont une racine commune

et si $x_1 = x'_1 = r$ est cette racine, on aura alors, dans la formule (5), quel que soit x ,

$$\begin{aligned} F(r) &= 0, & f(r) &= 0, \\ F(r) \varphi(x, r) &= 0, & f(r) \Phi(x, r) &= 0, \\ F(r) \varphi(x, r) - f(r) \Phi(x, r) &= 0, \\ F(x) \varphi(x, r) - f(x) \Phi(x, r) &= 0; \end{aligned}$$

ou, dans les équations (6),

$$\begin{aligned} (7) \quad & F(r) = 0, \quad f(r) = 0: \\ (8) \quad & \left\{ \begin{aligned} F(r) &= 0, & r F(r) &= 0, & \dots, & r^{m-1} F(r) &= 0, \\ f(r) &= 0, & r f(r) &= 0, & \dots, & r^{n-1} f(r) &= 0, \\ f(r) &= 0, & r f(r) &= 0, & \dots, & r^{n-m-1} f(r) &= 0, \end{aligned} \right. \\ (9) \quad & \left\{ \begin{aligned} F_0(r) r^{n-m} f(r) - f_0(r) F(r) &= 0, \\ F_1(r) r^{n-m} f(r) - f_1(r) F(r) &= 0, \\ \dots, \dots, \dots, \\ F_{m-1}(r) r^{n-m} f(r) - f_{m-1}(r) F(r) &= 0; \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (10) \quad & \left\{ \begin{aligned} \alpha_0[-f_0(r)] + b_0 F_0(r) &= 0, \\ \alpha_1[-f_0(r)] + \alpha_0[-f_1(r)] + b_1 F_0(r) + b_0 F_1(r) &= 0, \\ \dots, \dots, \dots, \\ \sum_{k=0}^{h=h} \alpha_{h-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=h} b_{h-k} F_k(r) &= 0, \\ \dots, \dots, \dots, \\ \sum_{k=0}^{k=m-1} \alpha_{m+k}[-f_k(r)] + \sum_{k=0}^{k=m} b_{m-k} F_{m+k}(r) &= 0, \\ \dots, \dots, \dots, \\ \sum_{k=h}^{k=m-1} \alpha_{m+h-k}[-f_k(r)] + \sum_{k=h}^{k=m-1} b_{m+h-k} F_{m+k}(r) &= 0, \\ \dots, \dots, \dots, \\ \alpha_n[-f_{m-2}(r)] + \alpha_{n-1}[-f_{m-1}(r)] \\ &+ b_m F_{n-2}(r) + b_{m-1} F_{n-1}(r) = 0, \\ \alpha_n[-f_{m-1}(r)] + b_m F_{n-1}(r) &= 0. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

ou

$$h = 0, 1, 2, \dots, m-1; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-m-1.$$

Réciproquement, si l'on suppose, dans la formule (5), pour toutes les valeurs de x ,

$$(11) \quad F(x) \varphi(x, r) - f(x) \Phi(x, r) = 0,$$

ou

$$(12) \quad F(r) \varphi(x, r) - f(r) \Phi(x, r) = 0,$$

ou

$$(13) \quad F(r) \varphi(x, r) = 0, \quad f(r) \Phi(x, r) = 0,$$

ou enfin

$$(14) \quad F(r) = 0, \quad f(r) = 0,$$

les équations proposées (1) auront alors une racine commune r . Considérons séparément chacune des quatre conditions précédentes (11), (12), (13), (14).

1° Soit

$$(11) \quad F(x) \varphi(x, r) - f(x) \Phi(x, r) = 0,$$

ou

$$F(x) \varphi(x, r) = f(x) \Phi(x, r);$$

en mettant les racines $x_1, x_2, \dots, x_n$ au lieu de x dans cette dernière égalité, on voit que $f(x) = 0$ admet au moins une racine de $F(x) = 0$, puisque l'équation $\Phi(x, r) = 0$, qui est du degré $n-1$, n'a que $n-1$ racines; donc les équations $F(x) = 0$, $f(x) = 0$, ont une racine commune, par exemple, $x_1 = x'_1$; alors, comme

$$\begin{aligned} \Psi(x_1) &= F(x) \varphi(x, x_1) - f(x) \Phi(x, x_1) \\ &= F(x_1) \varphi(x, x_1) - f(x_1) \Phi(x, x_1) = 0, \end{aligned}$$

on a

$$\Psi(r) - \Psi(x_1) = 0.$$

et, dans le cas où $m < n$,

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_0(r)f(r) = 0, \\ F_1(r)f(r) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ F_{n-m-1}(r)f(r) = 0 \\ F_{n-m}(r)f(r) - f_0(r)F(r) = 0, \\ F_{n-m+1}(r)f(r) - f_1(r)F(r) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ F_{n-1}(r)f(r) - f_{m-1}(r)F(r) = 0, \end{array} \right.$$

ou, plus simplement,

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(r) = b_0 r^m + b_1 r^{m-1} + \dots + b_{m-1} r + b_m r^0 = 0, \\ rf(r) = b_0 r^{m+1} + b_1 r^m + \dots + b_{m-1} r^2 + b_m r = 0, \\ \dots \dots \dots \\ r^{n-m-1} f(r) = b_0 r^{n-1} + b_1 r^{n-2} + \dots \\ \quad + b_{m-1} r^{n-m} + b_m r^{n-m-1} = 0, \\ F_0(r) r^{n-m} f(r) - f_0(r) F(r) \\ \quad = A_{1,1} r^{n-1} + A_{2,1} r^{n-2} + \dots + A_{n-1,1} r + A_{n,1} r^0 = 0, \\ F_1(r) r^{n-m} f(r) - f_1(r) F(r) \\ \quad = A_{1,2} r^{n-1} + A_{2,2} r^{n-2} + \dots + A_{n-1,2} r + A_{n,2} r^0 = 0, \\ \dots \dots \dots \\ F_{m-1}(r) r^{n-m} f(r) - f_{m-1}(r) F(r) \\ \quad = A_{1,m} r^{n-1} + A_{2,m} r^{n-2} + \dots + A_{n-1,m} r + A_{n,m} r^0 = 0. \end{array} \right.$$

Les résultantes des équations $F(x) = 0, f(x) = 0$, dans les cas considérés, s'obtiennent, comme on sait, en égalant à zéro les déterminants des systèmes (15) et (17) (méthode abrégée de Bézout).

3° Si l'on a, pour toutes les valeurs de x ,

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(r) \varphi(x, r) \\ \quad = F(r)[f_0(r)x^{m-1} + f_1(r)x^{m-2} + \dots + f_{m-1}(r)] = 0, \\ f(r) \Phi(x, r) \\ \quad = f(r)[F_0(r)x^{n-1} + F_1(r)x^{n-2} + \dots + F_{n-1}(r)] = 0, \end{array} \right.$$

alors

$$\begin{aligned} F(x) \varphi(x, r) - f(x) \Phi(x, r) \\ = F(r) \varphi(x, r) - f(r) \Phi(x, r) = 0, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$r = x_1 = x'_1.$$

En égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x , dans les égalités (13), on trouve $n + m$ équations linéaires, à $n + m$ inconnues : $r^0, r, r^2, \dots, r^{n+m-1}$,

$$(18) \quad \begin{cases} f_0(r) F(r) = 0, & f_1(r) F(r) = 0, \\ f_2(r) F(r) = 0, & \dots, & f_{m-1}(r) F(r) = 0, \\ F_0(r) f(r) = 0, & F_1(r) f(r) = 0, \\ F_2(r) f(r) = 0, & \dots, & F_{n-1}(r) f(r) = 0 \quad (1), \end{cases}$$

ou, plus simplement,

$$(19) \quad \begin{cases} F(r) = 0, & r F(r) = 0, \\ r^2 F(r) = 0, & \dots, & r^{m-1} F(r) = 0, \\ f(r) = 0, & r f(r) = 0, \\ r^2 f(r) = 0, & \dots, & r^{n-1} f(r) = 0; \end{cases}$$

le déterminant égalé à zéro des équations (19) sera la résultante cherchée. Il est facile de voir que les lignes horizontales de ce déterminant sont les colonnes verticales de celui qui correspond aux équations (10) (méthode de M. Sylvester).

4° Enfin, supposons

$$(14) \quad F(r) = 0, \quad f(r) = 0:$$

comme, en vertu de la formule (4),

$$\begin{aligned} b_0^n [F(x'_1) - F(r)] [F(x'_2) - F(r)] \dots [F(x'_m) - F(r)] \\ = (-1)^m b_0^{n-1} \Phi(x'_1, r) \Phi(x'_2, r) \dots \Phi(x'_m, r) f(r), \end{aligned}$$

(1) Il est évident que, si l'on prend les systèmes (16) et (17), on introduira des facteurs étrangers dans les résultantes des équations données (1).

et aussi

$$\begin{aligned} & \alpha_0^m [f(x_1) - f(r)] [f(x_2) - f(r)] \dots [f(x_n) - f(r)] \\ & = (-1)^n \alpha_0^{m-1} \varphi(x_1, r) \varphi(x_2, r) \dots \varphi(x_n, r) F(r), \end{aligned}$$

on a la résultante des équations données $F(x) = 0$,
 $f(x) = 0$,

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_0^n F(x'_1) F(x'_2) \dots F(x'_m) = 0, \\ \text{ou} \\ \alpha_0^m f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) = 0. \end{array} \right.$$
