

H. LAURENT

**Démonstration simple des formules
qui servent au calcul des tables de
logarithmes sinus**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 11
(1892), p. 119-120

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1892_3_11__119_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION SIMPLE DES FORMULES QUI SERVENT AU CALCUL DES TABLES DE LOGARITHMES SINUS;

PAR M. H. LAURENT.

La fonction

$$\sin x - x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

s'annule pour $x = 0, \pm\pi, \dots, \pm n\pi$, et il est naturel de poser

$$(1) \quad \begin{cases} \sin x - x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \\ = Ax^2 \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \end{cases}$$

car le premier membre de cette équation, divisé par x , s'annule encore pour $x = 0$. Si l'on considère alors la fonction

$$\begin{aligned} \sin z - z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \\ - Az^2 \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right), \end{aligned}$$

où A est donné par la formule (1), on voit que cette fonction s'annulera pour les $2n+1$ valeurs $0, \pm\pi, \dots, \pm n\pi$ de z et, en outre, en vertu de (1) pour $z = x$, j'ajoute que $z = 0$ est une racine double : donc la dérivée d'ordre $2n+2$ de la fonction considérée s'annulera pour une valeur comprise entre $-n\pi$ et $+n\pi$ si l'on

suppose x compris entre ces limites. Or cette dérivée est

$$\pm \sin z = \Lambda \frac{1.2.3 \dots (2n+2)}{\pi^2 2 \pi^2 \dots n^2 \pi^2},$$

et il en résulte que la valeur absolue de Λ est moindre que

$$\frac{(1.2.3 \dots n)^2 \pi^{2n}}{1.2.3 \dots (2n+2)}$$

ou

$$\frac{\pi^2}{n+1} \frac{2\pi^2}{n+2} \dots \frac{n\pi^2}{2n} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)};$$

cette quantité a manifestement pour limite zéro pour $n = \infty$: on peut donc écrire

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) + \varepsilon,$$

ε ayant pour limite zéro quand $n = \infty$; on a donc

$$\log \sin x = \log x + \log \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) + \dots + \log \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) + \dots$$

On démontrerait avec la même facilité la formule

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right) \dots + \left(1 - \frac{4x^2}{(2n+1)^2 \pi^2}\right) + \varepsilon,$$

où ε tend vers zéro avec n .
