Nouvelles annales de mathématiques

E. Cahen

Note sur un développement des quantités numériques, qui présente quelque analogie avec celui en fractions continues

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 508-514

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__508_0>

NOTE SUR UN DÉVELOPPEMENT DES QUANTITÉS NUMÉRIQUES, QUI PRÉSENTE QUELQUE ANALOGIE AVEC CELUI EN FRACTIONS CONTINUES;

PAR M. E. CAHEN,
Professeur au lycée de Rennes.

1. Soit une quantité numérique x, en appelant a_1 sa partie entière

$$x = a_1 + \frac{1}{x_0},$$

x_0 étant < 1.

Soit u_0 la partie entière de x_0.

$$u_0 < x_0 < u_0 + 1,$$

$\frac{1}{u_0}$ est une valeur approchée de $\frac{1}{x_0}$ par excès, à moins de

$$\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_0+1} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{u_0(u_0+1)}.$$

On peut donc poser

$$x = a_1 + \frac{1}{u_0} - \frac{1}{x_1},$$

$$\frac{1}{x_0} < \frac{1}{u_0(u_0+1)} \quad a\ fortiori \quad < 1.$$

En appelant u_1 la partie entière de x, on peut écrire de même

$$x = a_1 + \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{x_2},$$

et ainsi de suite.

Finalement

$$(1) \qquad x = a_1 + \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \ldots \pm \frac{1}{u_n} \mp \ldots$$

et l'erreur commise, quand on s'arrête au terme $\frac{1}{u_n}$, est du signe de u_n et plus petite en valeur absolue que

$$\frac{1}{u_n(u_n+1)}.$$

2. On peut développer x par une série analogue d'une façon un peu différente.

Soit a_1 la partie entière de x

$$x = a_1 + \frac{1}{x_0}.$$

Soit $U_0 - 1$ la partie entière de x_0, $\frac{1}{U_0}$ est une valeur de $\frac{1}{x_0}$ approchée par *défaut* à moins de $\frac{1}{U_0 - 1} - \frac{1}{U_0}$ ou $\frac{1}{U_0(U_0-1)}$ près.

On peut donc poser

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x = a_1 + \frac{1}{U_0} + \frac{1}{X_1}, \\ & \frac{1}{X_1} < \frac{1}{U_0(U_0-1)} \quad \textit{a fortiori} \quad < 1, \end{aligned} \right.$$

et ainsi de suite.

Finalement

$$x = a_1 + \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} + \ldots + \frac{1}{U_n} + \ldots.$$

L'erreur commise en s'arrêtant au terme $\frac{1}{U_n}$ est positive et inférieure à

$$\frac{1}{U_n(U_n-1)}.$$

3. Le développement en séries de cette nature n'est évidemment possible que d'une seule manière. Si x est incommensurable, le développement est évidemment illimité. Je dis que, si x est commensurable, le dévelop-

pement est limité. Considérons, par exemple, le développement en série (1).

Je peux supposer $x < 1$ pour ne pas embarrasser les calculs du terme irrégulier a_1.

Soit alors

$$x = \frac{A}{B},$$

A, B étant entiers :

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \dots.$$

Considérons

$$\frac{A}{B} - \frac{1}{u_0} = -\frac{(B - A u_0)}{B u_0} = -\frac{A_0}{B_0},$$

en posant

$$A_0 = B - A u_0,$$
$$B_0 = B u_0;$$

$$\frac{A}{B} - \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} = -\frac{A_0}{B_0} + \frac{1}{u_1} = \frac{B_0 - A_0 u_1}{B_0 u_1} = \frac{A_1}{B_1},$$

en posant

$$A_1 = B_0 - A_0 u_1,$$
$$B_1 = B_0 u_1.$$

D'une façon générale,

$$\frac{A}{B_0} - \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} - \dots \pm \frac{1}{u_p} = \frac{A_p}{B_p},$$
$$A_p = B_{p-1} - A_{p-1} u_p,$$
$$B_p = B_{p-1} u_p.$$

Je dis que les nombres entiers A_p vont en décroissant, c'est-à-dire que

$$B_p - A_p u_{p+1} < A_p$$

ou

$$\frac{A_p}{B_p} > \frac{1}{u_{p+1} + 1}.$$

Or c'est ce qui résulte de la façon même dont la série a été formée. On a déterminé u_{p+1}, justement par la condition

$$\frac{1}{u_{p+1}} > \frac{A_p}{B_p} > \frac{1}{u_{p+1}+1}.$$

Les nombres entiers et positifs,

$$A_0, \quad A_1, \quad \ldots, \quad A_p,$$

allant en décroissant, l'un d'eux est forcément nul et la série est limitée.

Exemple :

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{791}.$$

4. Pour qu'une série

$$a_1 + \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \ldots$$

soit une série de la forme (1), il faut et il suffit que, pour toute valeur de n,

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_{n-2}} - \ldots < \frac{1}{u_{n-1}(u_{n-1}+1)}.$$

Si, en effet, cette condition est remplie, on voit facilement qu'en développant la quantité

$$x = a_1 + \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} + \ldots$$

en série (1), on retrouve justement ce développement.

De même pour une série

$$a_1 + \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \ldots,$$

la condition est que

$$\frac{1}{U_n} + \frac{1}{U_{n+1}} + \ldots < \frac{1}{U_{n-1}(U_{n-1}-1)}.$$

Conséquence. — *Si, dans une série illimitée de la* *forme*

$$\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \ldots,$$

on a, pour toute valeur de n, ou tout au moins à partir d'une certaine valeur de n, constamment

$$\frac{1}{u_n(u_n+1)} > \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n+2}} + \ldots,$$

la série a pour somme un nombre incommensurable.

En particulier, cette condition est remplie si

$$\frac{1}{u_n(u_n+1)} > \frac{1}{u_{n+1}}$$

ou

$$\frac{1}{u_n(u_n+1)} > \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n+2}} + \frac{1}{u_{n+3}}, \qquad \ldots,$$

ce qui donne des caractères permettant de reconnaitre si la somme d'une série est un nombre incommensurable.

On aurait un théorème analogue pour la série

$$\frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} + \ldots.$$

Une telle série représente un nombre incommensurable, si l'on a constamment

$$\frac{1}{U_n(U_n-1)} > \frac{1}{U_{n+1}} + \frac{1}{U_{n+2}} + \ldots.$$

Exemple. — Soit

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1806} - \frac{1}{3263442} + \ldots,$$

chaque dénominateur est égal au précédent multiplié par lui-même plus un.

On a donc ici

$$\frac{1}{u_n(u_n+1)} = \frac{1}{u_{n+1}}$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{u_n(u_n+1)} > \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n+2}} + \frac{1}{u_{n+3}} - \cdots.$$

Donc la série a pour somme un nombre incommensurable.

Autre exemple. — La série dont le terme général est

$$\frac{1}{a^{1.2.3\ldots n}},$$

a étant > 1.

On voit facilement que la somme de cette série est incommensurable.

D'ailleurs Liouville a montré que cette somme n'est pas non plus un nombre algébrique.

5. On peut généraliser le résultat précédent, en considérant des séries de la forme

$$\frac{v_0}{u_0} - \frac{v_1}{u_1} + \frac{v_2}{u_2} - \ldots$$

ou

$$\frac{v_0}{u_0} + \frac{v_1}{u_1} + \frac{v_2}{u_2} + \ldots,$$

$u_0, u_1, \ldots, v_0, v_1, \ldots$ étant des nombres entiers.

On démontrera sans peine que la somme de la première est un nombre incommensurable, si l'on a constamment

$$\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{v_{n+2}}{u_{n+2}} + \ldots < \frac{v_n}{u_n(u_{n+1})}.$$

En particulier, cette condition est remplie si

$$\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} < \frac{v_n}{u_n(u_n+1)},$$

ou si

$$\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{v_{n+2}}{u_{n+2}} + \frac{v_{n+3}}{u_{n+3}} < \frac{v_n}{u_n(u_n+1)}, \qquad \cdots.$$

La somme de la seconde série est un nombre incommensurable, si

$$\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} + \frac{v_{n+2}}{u_{n+2}} + \ldots < \frac{v_n}{u_n(u_n - 1)}, \qquad \ldots\ldots$$