

SVÉCHNICOFF

Les centres d'inertie de la moitié et du quart du corps épicycloïdal

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 10 (1891), p. 473-476

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__473_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES CENTRES D'INERTIE DE LA MOITIÉ ET DU QUART DU CORPS ÉPICYCLOIDAL;

PAR M. SVÉCHNICOFF,
Professeur au gymnase de Troitzk.

Le plan xoy divise la surface épicycloïdale et le corps épicycloïdal en deux parties égales. Désignons par l et L les distances du centre d'inertie de chaque moitié de la surface et du corps au plan xy ,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} ml &= \sigma \iint z \, dS \\ &= 4a^3 \sigma \int_0^{\frac{2\pi}{n}} (1 - \cos n\varphi) \sin^3 \frac{n\varphi}{2} \, d\varphi \int_0^{\pi} (n + \cos x) \sin x \, dx \\ &= 8a^3 n \sigma \int_0^{\frac{2\pi}{n}} (1 - \cos n\varphi) \sin^3 \frac{n\varphi}{2} \, d\varphi = \frac{512 \pi \sigma a^3}{15}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$l = \frac{16a}{5\pi}.$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} ML &= \sigma \iiint z \, dx \, dy \, dz = \frac{\sigma}{2} \iint z^2 \, dx \, dy \\ &= \frac{\sigma a^4}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} (1 - \cos n\varphi)^4 \, d\varphi \int_0^{\pi} (n + \cos x) \sin^3 x \, dx \\ &= \frac{25\pi n a^4}{3} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} (1 - \cos n\varphi)^4 \, d\varphi = \frac{35\pi \sigma a^4}{6}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$L = \frac{7a}{3\pi}.$$

Le plan zoy' divise la surface et le corps épicycloïdal en deux parties égales. Désignons par t et T les distances du centre d'inertie de chaque moitié de la surface et du corps au plan zy' ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mt &= \sigma \int_{\psi=0}^{\psi=-\frac{\pi}{n}} \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} x' dS = 4a^3\sigma \\ &\times \int_0^{-\frac{\pi}{n}} \cos^3 \frac{n\psi}{2} d\psi \int_0^{2\pi} [n(n \sin \psi + \cos \psi \sin n\psi) + (1 + \cos n\psi) \sin \psi \cos^2 2] d\psi, \\ \frac{1}{2}mt &= 4a^3\sigma \pi \int_0^{-\frac{\pi}{n}} \cos^3 \frac{n\psi}{2} \\ &\times [(2n^2 + 1) \sin \psi + 2n \cos \psi \sin n\psi + \sin \psi \cos n\psi] d\psi, \\ \frac{1}{2}mt &= 4a^3\sigma \pi \int_0^{-\frac{\pi}{n}} f(\psi) d\psi, \\ f(\psi) &= -\frac{6n^2 - 2n + 5}{8} \sin \frac{n-2}{2} \psi + \frac{6n^2 + 2n + 5}{8} \sin \frac{n+2}{2} \psi \\ &- \frac{4n^2 - 6n + 5}{16} \sin \frac{3n-2}{2} \psi + \frac{4n^2 + 6n + 5}{16} \sin \frac{3n+2}{2} \psi \\ &+ \frac{2n-1}{16} \sin \frac{5n-2}{2} \psi + \frac{2n+1}{16} \sin \frac{5n+2}{2} \psi, \\ \int_0^{-\frac{\pi}{n}} f(\psi) d\psi &= \frac{600n^7 \sin \frac{\pi}{n} - 1040n^6 - 872n^4 + 960n^2 - 128}{(n^2 - 4)(9n^2 - 4)(25n^2 - 4)}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$t = \frac{3a \left(75n^7 \sin \frac{\pi}{n} - 130n^6 - 109n^4 + 120n^2 - 16 \right)}{(n^2 - 4)(9n^2 - 4)(25n^2 - 4)}.$$

En posant $n = 1$, $n = 2$, $n = \infty$, on a

$$t = \frac{9a}{7}, \quad t = \frac{11a}{8}, \quad t = \pi a - \frac{26a}{15}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{MT} &= \sigma \iiint r' \, dx' \, dy' \, dz \\ &= \sigma \int_{\psi=0}^{\psi=-\frac{\pi}{n}} \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} r' \, d\alpha = \frac{\pi \sigma a^4}{1} \\ &\times \int_0^{-\frac{\pi}{n}} (1 + \cos n\psi)^3 [(4n^2+1) \sin \psi + 4n \cos \psi \sin n\psi + \sin \psi \cos n\psi] \, d\psi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{MT} &= \frac{\pi \sigma a^4}{4} \int_0^{-\frac{\pi}{n}} f(\psi) \, d\psi, \\ f(\psi) &= \frac{80n^2+35}{8} \sin \psi - \frac{15n^2-7n+7}{2} \sin(n-1)\psi \\ &\quad + \frac{15n^2+7n+7}{2} \sin(n+1)\psi - \frac{2n^2-14n+7}{4} \sin(2n-1)\psi \\ &\quad + \frac{12n^2+14n+7}{4} \sin(2n+1)\psi - \frac{n^2-3n+1}{2} \sin(3n-1)\psi \\ &\quad + \frac{n^2+3n+1}{2} \sin(3n+1)\psi \\ &\quad + \frac{4n-1}{16} \sin(4n-1)\psi + \frac{4n+1}{16} \sin(4n+1)\psi, \\ \int_0^{-\frac{\pi}{n}} f(\psi) \, d\psi &= \frac{360n^8 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) - 512n^6 - 384n^4 + 192n^2 - 16}{(n^2-1)(4n^2-1)(9n^2-1)}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\text{T} = \frac{4a \left[45n^8 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) - 64n^6 - 48n^4 + 24n^2 - 2 \right]}{5\pi(n^2-1)(4n^2-1)(9n^2-1)}.$$

En posant $n=1$, $n=\infty$, on a

$$\text{T} = \frac{16a}{5\pi}, \quad \text{T} = \frac{24a}{7\pi}, \quad \text{T} = \frac{\pi a}{2} - \frac{64a}{45\pi}.$$

D'après cela, il est facile de déterminer la position du centre d'inertie de la moitié ou du quartier de la sur-

face et du corps épicycloïdal. En calculant

$$\begin{aligned}
 & \sigma \iiint z^3 dx dy dz \\
 &= \frac{\sigma}{3} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{2\pi}{n}} \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} z^3 dx dy \\
 &= \frac{\sigma a^5}{3} \int_0^{\frac{2\pi}{n}} (1 - \cos n\varphi)^5 d\varphi \int_0^{2\pi} (n + \cos \alpha) \sin^4 \alpha d\alpha,
 \end{aligned}$$

on a

$$\frac{63\pi^2\sigma a^5}{16} = \frac{63Ma^2}{80}.$$