

HUSQUIN DE RHÉVILLE

Construction géométrique du centre de courbure en un point d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 10 (1891), p. 411-416

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__411_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DU CENTRE DE COURBURE EN
UN POINT D'UNE COURBE RAPPORTÉE A DES COORDONNÉES
POLAIRES;**

PAR M. HUSQUIN DE RHÉVILLE,
Ingénieur civil.

I. Soit O (*fig. 1*) le pôle du système de coordonnées.
On sait que le segment ON, limité sur le rayon vec-
teur d'angle polaire $\omega + \frac{\pi}{2}$ par la normale AN en un

En remplaçant dans cette expression les quantités par les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} \text{AN} &= \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, & \text{AF} &= \frac{1}{\rho} \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega} \right)^2 \right], \\ \text{ON} &= \frac{d\rho}{d\omega}, & \text{AG} &= \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2 \left(\frac{d\rho}{d\omega} \right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\omega^2}}, \end{aligned}$$

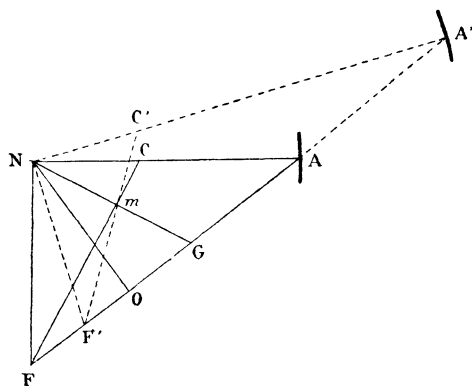
on obtient l'égalité cherchée

$$\text{OG} = - \frac{d^2\rho}{d\omega^2}.$$

III. *Centre de courbure d'une conchoïde.* — Réciproquement, si l'on connaît la valeur de $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$, on peut construire linéairement le centre de courbure C.

Il suffit de porter sur le rayon vecteur OA une longueur $\text{OG} = \frac{d^2\rho}{d\omega^2}$ et de joindre le point F au milieu *m*

Fig. 2.



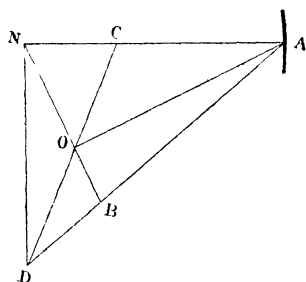
de NG. Cette droite *Fm* passe au centre de courbure C cherché (fig. 2).

Si un point A' décrit une conchoïde de la courbe donnée, c'est-à-dire si AA' est constant quel que soit le point A , les quantités $\frac{d\rho}{d\omega}$, $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$ sont identiques en A et en A' et le point m est fixe quelle que soit la longueur AA' .

Pour construire le centre de courbure C' de la conchoïde au point A' , on mène NF' perpendiculaire à la normale NA' jusqu'à sa rencontre en F' avec le rayon OA . La droite Fm , joignant le point F' au milieu m de NG , passe au centre de courbure C' cherché.

IV. *Représentation géométrique de $\frac{d^2\omega}{d\rho^2}$.* — Joignons le centre C de courbure au pôle O et soit D le point de rencontre de cette droite CO avec la perpendiculaire ND à la normale AN (fig. 3).

Fig. 3.



La droite AD rencontre ON en un point B tel que

$$OA \times OB = \frac{1}{\frac{d^2\omega}{d\rho^2}}.$$

En effet, le triangle ABN coupé par la transversale COD , nous donne

$$OB = ON \times \frac{AC}{NC} \times \frac{DB}{AD}.$$

On voit facilement que

$$\frac{DB}{AD} = \frac{\overline{ON}^2 + OB \cdot ON}{\overline{AN}^2}.$$

La première égalité devient alors, en y remplaçant $\frac{DB}{AD}$ par sa valeur et en la résolvant par rapport à OB ,

$$OB = \frac{\overline{ON}^3 \cdot AC}{\overline{AN}^3 - AC(\overline{AN}^2 - \overline{ON}^2)}.$$

En substituant aux quantités géométriques leurs valeurs en fonction de ρ , $\frac{d\rho}{d\omega}$ et $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$, on obtient, après simplification,

$$OB = - \frac{\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^3}{\rho \frac{d^2\rho}{d\omega^2}}.$$

En se rappelant que

$$\rho = OA, \quad \frac{d^2\omega}{d\rho^2} = - \frac{d^2\rho}{d\omega^2} \left(\frac{d\omega}{d\rho}\right)^3,$$

ceci peut s'écrire, sous la forme cherchée,

$$OA \times OB = \frac{1}{\frac{d^2\omega}{d\rho^2}}.$$

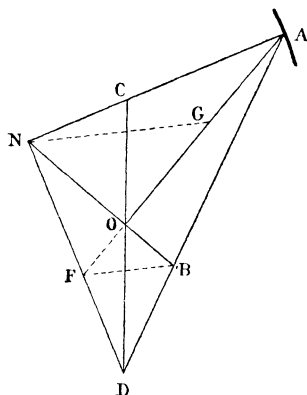
V. Réciproquement, si l'on connaît la valeur de $\frac{d^2\omega}{d\rho^2}$ au point A , on peut construire linéairement le centre C de courbure.

Il suffit de porter sur le rayon vecteur d'angle polaire $\omega + \frac{\pi}{2}$ une longueur OB telle que

$$OB = \frac{1}{\rho \frac{d^2\omega}{d\rho^2}},$$

de joindre AB qui rencontre en D la perpendiculaire ND à la normale AN menée par l'extrémité N de la sous-normale polaire (fig. 4).

Fig. 4



La droite DO passe au centre de courbure C cherché.

Remarquons que si, par le point N, on mène une parallèle à la droite FB, elle rencontre le rayon vecteur au point G précédemment défini par la relation

$$OG = -\frac{d^2 \rho}{d\omega^2}.$$

En effet,

$$OG = OF \frac{ON}{OB} = \frac{\overline{ON}^2}{\overline{OA}} \frac{ON}{OB} = \frac{\overline{ON}^3}{\overline{OA} \cdot OB}$$

et, comme

$$\overline{OA} \cdot OB = \frac{1}{\frac{d^2 \omega}{d\rho^2}}, \quad ON = \frac{d\rho}{d\omega},$$

on voit que

$$OG = \frac{d^2 \omega}{d\rho^2} \left(\frac{d\rho}{d\omega} \right)^3 = -\frac{d^2 \rho}{d\omega^2}.$$