

GENESE

Sur un cercle remarquable qui passe par deux points fixes d'une conique

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 10 (1891), p. 318-320

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__318_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR UN CERCLE REMARQUABLE
QUI PASSE PAR DEUX POINTS FIXES D'UNE CONIQUE;**

PAR M. GENESE,

Professeur à Aberystwyth (province de Galles).

Soient AB une corde fixe d'une conique, C son pôle, P un point variable de la courbe; par C on mène une droite antiparallèle à AB par rapport à l'angle APB rencontrant PA, PB en Q, Q'. Alors les points A, B, Q', Q sont sur un même cercle. Ce cercle est invariable.

Nommons α , β , γ les perpendiculaires abaissées du point P sur Bb, bA, AB. La conique a pour équation

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma^2} = k^2 \quad (\text{une constante}).$$

Or

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\sin PBb}{\sin PBA} = \frac{\sin(180^\circ - CBQ')}{\sin(180^\circ - AQC)} = \frac{\sin CBQ'}{\sin CQA};$$

de même

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\sin CAQ}{\sin CQ'B}.$$

Donc

$$k^2 = \frac{\sin CBQ'}{\sin CQ'B} \times \frac{\sin CAQ}{\sin CQA} = \frac{CQ'}{CB} \times \frac{CQ}{CA}.$$

On voit maintenant que la puissance de C par rapport au cercle ABQ'Q a une valeur constante. De là, en pro-

Fig. 1.

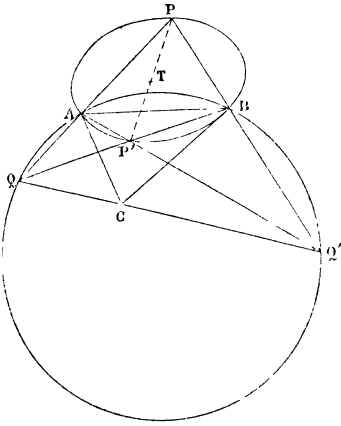
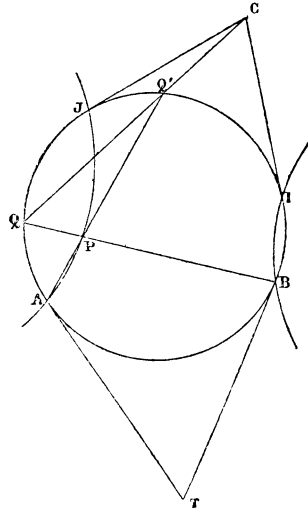


Fig. 2.



longeant la droite BC, on trouve encore un point fixe du cercle. Donc le cercle est complètement déterminé.

C. Q. F. D.

Inversement, la conique est déterminée par le cercle ABQ'Q et le point C. On mène la sécante QCQ'; le lieu du point (P) d'intersection des droites QA, Q'B est la conique. Les droites QB, Q'A se rencontrent en P', un point de la même courbe.

Les droites QQ', PP' sont homologues par rapport au cercle, et, puisque QQ' passe par un point fixe, il en est

de même avec PP' . Nommons T ce point fixe de la droite PP' ; le point T est le pôle de la droite AB par rapport au cercle.

On peut vérifier les théorèmes précédents par la méthode de la projection. Que la conique et le cercle se rencontrent encore aux points I, J , et projetons de façon à rejeter ij , la projection de IJ , à l'infini. On obtient deux cercles. En se servant de petites lettres pour désigner les projections des lettres majuscules, les angles apb, aqb sont constants, et, par suite, l'angle qbq' ($= qaq'$) est constant. Il faut alors que c soit le centre du cercle qab ; autrement, qq' toucherait un cercle concentrique, au lieu de passer par un point fixe. Puis, l'angle pap' étant droit, pp' passe par le centre (t) du cercle $pap'b$. De plus, c étant le pôle de ab par rapport au cercle t , les deux cercles se coupent orthogonalement et t est pôle de ab par rapport au cercle c .

Enfin, c, t sont les pôles de la droite à l'infini ij ; donc C, T , dans la figure originale, sont les pôles de IJ aussi bien que de AB (*fig. 2*).

On voit immédiatement que le point T jouit de la propriété suivante : *TPP' étant une sécante variable de la conique, la somme (avec une certaine convention) des angles $APB, AP'B$ est invariable.* (En effet, dans la *fig. 1*, c'est la différence qui est constante.) M. Gaston Tarry a remarqué qu'il y a deux points qui jouissent de cette propriété. Une analyse assez compliquée m'a montré qu'il n'y a que deux points réels qui en jouissent, et que T est un des points remarqués par M. Tarry.
