

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 10
(1891), p. 312-317

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__312_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Gomez Teixeira à M. Rouché.

Dans une Note *Sur la formule de Stirling*, qui a été insérée dans les *Comptes rendus*, t. CX, p. 513; 1890,

vous démontrez d'une manière bien simple la formule

$$(2) \quad \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+p)} = e^{\frac{\theta p}{12(n+p)n}},$$

où θ représente un nombre compris entre 0 et 1, et où l'on a

$$(1) \quad \varphi(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Ensuite, au moyen de cette formule, vous trouvez la formule de Stirling, qui donne le produit $\Gamma(n+1)$, quand n est un nombre très grand. Vous supposez, dans votre analyse, que n est un nombre positif *entier*.

En étudiant votre démonstration, je viens de remarquer qu'on peut la modifier de manière à considérer le cas où n représente un nombre quelconque, rationnel ou irrationnel. Je remarque premièrement que votre démonstration de la formule (2) a lieu quand n est fractionnaire, ainsi que la démonstration, basée sur la formule de Wallis, que vous donnez de l'égalité

$$\lim_{p=\infty} \varphi(p) = \sqrt{2\pi}.$$

Ensuite je modifie l'analyse que vous employez pour déduire de (2) la formule de Stirling de la manière suivante.

Je trouve premièrement au moyen de la formule (1)

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n+p)}{\varphi(p)} = \lim_{p=\infty} \frac{\Gamma(n+p+1)e^{-p}p^{p+\frac{1}{2}}}{\Gamma(p+1)e^{-(n+p)}(n+p)^{n+p+\frac{1}{2}}},$$

et ayant égard aux égalités

$$\begin{aligned} \Gamma(n+p+1) &= n(n+1)\dots(n+p)\Gamma(n), \\ \Gamma(p+1) &= 1.2.3\dots p, \end{aligned}$$

j'écris cette formule d'abord de la manière suivante

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n+p)}{\varphi(n)} = \lim_{n=\infty} \frac{n(n+1)\dots(n+p)\Gamma(n)e^{-p}p^{p+\frac{1}{2}}}{p! e^{-(n+p)}(n+p)^{n+p+\frac{1}{2}}},$$

et ensuite, ayant égard à la définition de Gauss de la fonction $\Gamma(n)$,

$$\Gamma(n) = \lim_{p=\infty} \frac{p! p^n}{n(n+1)\dots(n+p)},$$

je l'écris de la manière suivante

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n+p)}{\varphi(p)} \lim_{p=\infty} \frac{p^{n+p+\frac{1}{2}}}{e^{-n}(n+p)^{n+p+\frac{1}{2}}}.$$

Mais nous avons

$$\lim_{p=\infty} \left(\frac{n}{p} + 1 \right)^{n+p+\frac{1}{2}} = e^n.$$

Donc on aura

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n+p)}{\varphi(p)} = 1,$$

et, par conséquent,

$$\lim_{p=\infty} \varphi(n+p) = \lim_{p=\infty} \varphi(p) = \sqrt{2\pi}.$$

Si l'on remarque maintenant que la formule (2) donne

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+p)} = e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0 < \theta < 1),$$

et par conséquent

$$\varphi(n) = e^{\frac{\theta}{12n}} \lim_{p=\infty} \varphi(n+p),$$

on trouve

$$\varphi(n) = e^{\frac{\theta}{12n}} \sqrt{2\pi},$$

et l'égalité (1) donne ensuite la formule de Stirling

$$\Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

Pour plus de clarté, je crois devoir reproduire ici la démonstration que j'ai donnée dans les *Comptes rendus* et à laquelle se rapporte la lettre de M. Teixeira.

La relation bien connue

$$\log(n+1) - \log n = \frac{2}{2n+1} \left[1 + \frac{\theta}{12n(n+1)} \right],$$

où n désigne un nombre entier positif quelconque, et θ un nombre compris entre 0 et 1, peut s'écrire

$$\frac{\theta}{12n(n+1)} = -1 + (n + \frac{1}{2})[\log(n+1) - \log n].$$

Elle devient

$$\frac{\theta}{12n(n+1)} = \log \varphi(n) - \log \varphi(n+1),$$

quand on pose

$$(1) \quad \varphi(n) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{e^{-n} n^{n + \frac{1}{2}}}.$$

On conclut de là

$$\log \varphi(n) > \log \varphi(n+1)$$

et

$$\log \varphi(n) - \frac{1}{12n} < \log \varphi(n+1) - \frac{1}{12(n+1)};$$

en d'autres termes, des deux fonctions

$$\varphi(n), \quad \varphi(n) e^{-\frac{1}{12n}},$$

la première est décroissante et la seconde croissante, lorsque l'entier n croit. Si donc on désigne par p un nombre entier

positif quelconque, on a les inégalités

$$\begin{aligned} \varphi(n) &> \varphi(n+p), \\ \varphi(n)e^{-\frac{1}{12n}} &< \varphi(n+p)e^{-\frac{1}{12(n+p)}}, \end{aligned}$$

que l'on peut remplacer par l'égalité

$$(2) \quad \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+p)} = e^{\frac{\theta p}{12n(n+p)}},$$

dans laquelle θ désigne un nombre compris entre 0 et 1.

Il est bien aisé de déduire de cette relation la formule célèbre de Stirling pour l'évaluation approchée du produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ lorsque n est un grand nombre.

En effet, la relation (2), appliquée au cas où n est égal à p , montre immédiatement que le rapport

$$\frac{\varphi(p)}{\varphi(2p)}$$

a pour limite l'unité, lorsque p croît indéfiniment. On a donc, pour $p = \infty$,

$$\lim \varphi(p) = \lim \frac{\varphi(p)^2}{\varphi(2p)}$$

ou, d'après (1),

$$\lim \varphi(p) = \lim \sqrt{4 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2p-2}{2p-1} \cdot \frac{2p}{2p-1}},$$

et enfin, en vertu du théorème de Wallis,

$$\lim \varphi(p) = \sqrt{2\pi}.$$

Dès lors, si dans la formule (2) on laisse n fixe en faisant croître p indéfiniment, on obtient

$$\frac{\varphi(n)}{\sqrt{2\pi}} = e^{\frac{\theta}{12n}},$$

c'est-à-dire, d'après la définition de $\varphi(n)$,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

(317)

C'est la formule de Stirling, qui donne deux limites

$$\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}, \quad \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \cdot e^{\frac{1}{12n}},$$

entre lesquelles est compris le produit $1.2.3\dots n$. (E. R.)