

V. JAMET

Sur le nombre e

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 10
(1891), p. 215-218

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__215_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE NOMBRE e ;

PAR M. V. JAMET.

Je me propose d'apporter une simplification notable à la méthode créée par M. Hermite pour démontrer que le nombre e n'est racine d'aucune équation algébrique, à coefficients entiers (*Sur la fonction exponentielle*. Paris, Gauthier-Villars, 1874).

Résumons d'abord les considérations fondamentales. Si $F(z)$ désigne un polynôme entier, de degré m , l'intégration par parties donne l'identité

$$e^a \int_0^a e^{-z} F(z) dz = [F(0) + F'(0) + \dots + F^{(m)}(0)] e^a - [F(a) + F'(a) + \dots + F^{(m)}(a)],$$

ou bien, en faisant, pour abrégér,

$$(1) \quad F(z) + F'(z) + F''(z) + \dots + F^{(m)}(z) = \Phi(z),$$

$$e^a \int_0^a e^{-z} F(z) dz = \Phi(0) e^a - \Phi(a).$$

D'ailleurs, en supposant vraie l'égalité

$$(2) \quad N_0 + N_1 e + N_2 e^2 + \dots + N_p e^p = 0,$$

si, dans l'égalité (1), on remplace a successivement par 1, 2, 3, ..., p , et si l'on combine les égalités obtenues avec l'égalité (2), on trouvera

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{a=1}^{a=p} N_a e^a \int_0^a e^{-z} F(z) dz \\ = -[N_0 \Phi(0) + N_1 \Phi(1) + N_2 \Phi(2) + \dots + N_p \Phi(p)]. \end{array} \right.$$

Si les coefficients du polynôme $F(z)$ sont entiers, ainsi que les coefficients N , le second membre de cette égalité sera un nombre entier : ce nombre sera divisible par 1, 2, 3, 4, ..., n , si l'on fait

$$F(z) = z^n (z-1)^n (z-2)^n \dots (z-p)^n (\alpha-z)(\beta-z) \dots (\lambda-z),$$

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$ désignant quelques-uns des nombres 1, 2, 3, ..., $p-1$, écrits par ordre de grandeur croissante; c'est dans le choix de ces nombres que réside la simplification annoncée. Divisons, en effet, les deux nombres

de l'égalité (3) par $1, 2, 3, \dots, n$. Nous trouvons un nombre entier, égal à

$$(4) \quad \frac{1}{1.2.3.4\dots n} \sum_{a=1}^{a=p} N_a e^a \int_0^a e^{-z} F(z) dz.$$

Je dis qu'on peut choisir les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$, de telle sorte que cette expression soit différente de zéro, mais inférieure (numériquement) à un nombre donné ε , si petit qu'il soit. En effet, décomposons chacune des intégrales qui figurent dans l'expression ci-dessus en une somme de termes, tels que

$$\int_0^1 e^{-z} F(z) dz + \int_0^2 e^{-z} F(z) dz + \int_0^3 e^{-z} F(z) dz + \dots \\ + \int_{a-1}^a e^{-z} F(z) dz$$

Nous voyons alors que la somme qui entre dans cette même expression est une fonction linéaire, homogène, des intégrales, calculées de zéro à 1, de 1 à 2, de 2 à 3, ..., et finalement de $p-1$ à p ; en outre, l'un, au moins, des coefficients de cette fonction n'est pas nul : c'est celui de l'intégrale prise de $p-1$ à p ; en effet, il se réduit à $N_p e^p$. Je dis qu'on peut choisir des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$, de telle sorte que tous les termes de cette fonction linéaire aient le même signe. En effet, considérons l'expression

$$A \int_0^1 e^{-z} F(z) dz + B \int_1^2 e^{-z} F(z) dz + C \int_0^3 e^{-z} F(z) dz + \dots$$

égale à la somme que nous voulons étudier, ou bien égale et de signe contraire à cette somme, de manière que le premier de ses coefficients soit positif; soient q la limite supérieure de l'intégrale qui termine le premier groupe de termes à coefficients positifs, r la limite su-

périeure de l'intégrale qui termine le premier groupe de termes à coefficients négatifs, s la limite supérieure de l'intégrale qui entre dans le terme final du deuxième groupe de termes à coefficients positifs, et ainsi de suite. Chacune des intégrales de la somme précédente aura le même signe que son coefficient, si nous faisons n pair, et

$$\alpha = q, \quad \beta = r, \quad \gamma = s, \quad \dots, \quad \lambda = v,$$

v désignant la limite supérieure de l'intégrale qui termine l'avant-dernier groupe. De cette manière, on est assuré que l'expression (4) n'est nulle pour aucune des valeurs paires de n , et cela suffit pour mener la démonstration à bonne fin.

En effet, quand z varie de zéro à p , les produits

$$(\alpha - z)(\beta - z) \dots (\lambda - z)$$

et

$$z(z-1)(z-2) \dots (z-p)$$

restent numériquement inférieurs, le premier à un nombre μ , le deuxième à un nombre ν , indépendants, l'un et l'autre, de n , et si l'on appelle H la plus grande valeur numérique des coefficients $A, B, C, \dots$, on voit que l'expression (4) est numériquement inférieure à

$$p H^{\mu} \frac{\nu!}{1.2.3 \dots n} ;$$

or, cette dernière expression tend vers zéro, quand n est de plus en plus grand. C. Q. F. D. (1).

(1) On pourra consulter aussi sur une simplification de la méthode de M. Hermite une Note de M. Stieltjes (*Comptes rendus*, 1890).