

E. GROSSETÊTE

**Agrégation des sciences mathématiques
(concours de 1889). Solution de la
question d'analyse**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 10
(1891), p. 208-212

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__208_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
(CONCOURS DE 1889).

SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE;

PAR M. E. GROSSETÊTE,
Professeur au lycée de Nevers.

•
Soient h et k les invariants de l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad \frac{d^2 z}{dx dy} + a \frac{dz}{dx} + b \frac{dz}{dy} + cz = 0,$$

et h_1, k_1 les invariants de l'équation (E_1) obtenue en appliquant la méthode de Laplace.

Trouver les formes que doivent avoir les invariants

h et k pour que l'on ait les deux relations

$$h_1 = lh, \quad k_1 = mk,$$

l et m étant des constantes.

Déterminer les formes que prennent dans ces conditions les coefficients a, b, c de l'équation (E).

I. On sait ⁽¹⁾ que, si l'on désigne par h_1 et k_1 les invariants de l'équation (E₁), on a

$$h_1 = 2h - k - \frac{d^2 \log h}{dx dy},$$

$$k_1 = h.$$

Or ici $h_1 = lh$, $k_1 = mk$; on conclut que l'équation donnant h est

$$h \left(l + \frac{1}{m} - 2 \right) = \frac{d^2 \log h}{dx dy}.$$

Si l'on pose $l + \frac{1}{m} - 2 = p$, il faudra intégrer l'équation

$$(1) \quad \frac{d^2 \log h}{dx dy} = ph,$$

dans laquelle p est constant.

Pour cela, posons

$$\log h = 2z, \quad \text{où} \quad e^{2z} = h.$$

(1) devient

$$\frac{d^2 z}{dx dy} = pe^{2z}.$$

C'est une équation de Liouville; pour l'intégrer, nous poserons

$$\frac{dz}{dy} = Q,$$

⁽¹⁾ DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, t. II, p. 28. Paris, Gauthier-Villars et fils.

d'où

$$\frac{dQ}{dx} = pe^{2z},$$

et, en prenant la dérivée par rapport à y ,

$$\frac{d^2Q}{dx dy} = \frac{dQ}{dx} 2Q,$$

par suite

$$\frac{dQ}{dy} - Q^2 = F(y).$$

Soit $\psi(y) = \frac{1}{2} \frac{f''(y)}{f'(y)}$ une solution particulière de cette équation.

Pour avoir la solution générale, posons

$$Q = \frac{1}{2} \frac{f''(y)}{f'(y)} + u,$$

u étant une nouvelle variable; il viendra

$$\frac{du}{dy} - u \frac{f''(y)}{f'(y)} - u^2 = 0,$$

d'où, après avoir multiplié par $\frac{-f'(y)}{u^2}$,

$$\frac{d}{dy} \frac{f'(y)}{u} + f'(y) = 0.$$

Intégrant par rapport à y , il vient

$$\frac{f'(y)}{u} + f(y) + \varphi(x) = 0,$$

d'où

$$u = \frac{-f'(y)}{f(y) + \varphi(x)},$$

$$Q = \frac{1}{2} \frac{f''(y)}{f'(y)} - \frac{f'(y)}{f(y) + \varphi(x)},$$

enfin

$$pe^{2z} = \frac{dQ}{dx} = \frac{f'(y)\varphi'(x)}{[f(y) + \varphi(x)]^2};$$

donc

$$h = \frac{f'(y) \varphi'(x)}{p[f(y) + \varphi(x)]^2} = \frac{m}{l - 2m + 1} \frac{f'(y) \varphi'(x)}{[f(y) + \varphi(x)]^2},$$

$$k = \frac{1}{pm} \frac{f'(y) \varphi'(x)}{[f(y) + \varphi(x)]^2} = \frac{m}{l - 2m + 1} \frac{f'(y)^2 \varphi'(x)}{[f(y) + \varphi(x)]^2}.$$

II. Pour déterminer les formes que prennent dans ces conditions les coefficients a, b, c de l'équation (E), nous calculerons les coefficients a', b', c' de l'équation réduite

$$(E') \quad \frac{d^2 z'}{dx dy} + a' \frac{dz'}{dx} + b' \frac{dz'}{dy} + c' = 0,$$

qui a les mêmes invariants que la proposée et qui est telle que $a'b' - c' = 0$. Dans ce cas, on peut déterminer a', b', c' par les formules

$$a' = \int_{x_0}^x h dx, \quad b' = \int_{y_0}^y k dy, \quad c' = a'b',$$

$$a' = \int_{x_0}^x \frac{f'(y) \varphi'(x)}{p[f(y) + \varphi(x)]^2} dx = \frac{f'(y)[\varphi(x) - \varphi(x_0)]}{p[f(y) + \varphi(x)][f(y) + \varphi(x_0)]}$$

$$- \frac{mf'(y)}{l - 2m + 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{[f(y) + \varphi(x)][f(y) + \varphi(x_0)]},$$

$$b' = \int_{y_0}^y \frac{\varphi'(x)f'(y)}{pm[f(y) + \varphi(x)]^2} dy = \frac{\varphi'(x)}{pm} \frac{f(y) - f(y_0)}{[f(y) + \varphi(x)][f(y) + \varphi(x_0)]}$$

$$- \frac{\varphi'(x)}{l - 2m + 1} \frac{f(y) - f(y_0)}{[f(y) + \varphi(x)][f(y_0) + \varphi(x)]},$$

$$c' = \frac{m\varphi'(x)f'(y)}{(l - 2m + 1)^2} \frac{[f(x') - \varphi(x_0)][f(y) - f(y_0)]}{[f(y) + \varphi(x)]^2[f(y) + \varphi(x_0)][f(y_0) + \varphi(x)]}.$$

En faisant sur (E') une substitution de la forme

$$z' = \lambda z,$$

dans laquelle λ désigne une fonction quelconque de x et y , on obtiendra une équation (E) répondant à la

question. Les valeurs de a , b , c sont alors données par les formules

$$a = a' + \frac{d \log \lambda}{dy},$$

$$b = b' + \frac{d \log \lambda}{dx},$$

$$c = c' + a \frac{d \log \lambda}{dx} + b \frac{d \log \lambda}{dy} + \frac{l}{\lambda} \frac{d^2 \lambda}{dx dy}.$$