MAXIMILIEN MARIE

Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 10 (1891), p. 172-179

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__172_0>

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

CONFÉRENCES DONNÉES PAR M. MAXIMILIEN MARIE
au Collége Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève
et à l'École Monge (1).

---

22. *Les périodes de la quadratrice d'une courbe algébrique peuvent encore disparaître en devenant infinies.* — Lorsqu'un anneau de la courbe réelle se transforme en une branche parabolique, l'aire correspondante devient infinie et la quadratrice perd une période, parce qu'elle n'est plus exprimable.

Il en est de même lorsque l'une des deux branches de la courbe réelle, qui comprenaient des anneaux fermés de conjuguées, passant à l'infini, ces conjuguées deviennent paraboliques.

C'est ainsi que la quadratrice d'une conique perd sa période et devient algébrique lorsque cette conique se transforme en parabole. Si l'on considère cette parabole comme dérivée de l'ellipse, l'aire de cette ellipse, qui formait la période réelle de la quadratrice, est devenue infinie et a disparu. Si, au contraire, on considère la parabole comme dérivée de l'hyperbole, une des branches de cette hyperbole a passé à l'infini, l'aire commune des conjuguées de cette hyperbole a grandi indéfiniment et la période imaginaire est devenue infinie.

Il en serait évidemment de même si des anneaux de l'enveloppe imaginaire d'un lieu devenaient paraboliques.

---

(1) *Voir* t. IX, p. 308.

Mais la théorie des quadratrices des courbes paraboliques offre aujourd'hui des difficultés inabordables.

Ces courbes présentent, avec les courbes pourvues de points doubles à distance finie, cette analogie géométrique que ni les unes ni les autres n'ont jamais, eu égard à leur degré, le nombre maximum de tangentes parallèles à une direction donnée, et peut-être est-ce là le point de vue où il faudrait se placer pour en faire l'étude, car toute réduction dans ce nombre de tangentes en amène forcément une correspondante dans le nombre des anneaux fermés, mais il n'y a rien de fait à cet égard.

Nous ne nous occuperons donc plus des courbes paraboliques.

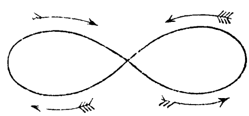
Au contraire, ce que nous nous proposons est de chercher, d'abord, le nombre des périodes de la quadratrice de la courbe la plus générale de degré m et de voir ensuite comment elle pourrait les perdre toutes successivement, les coefficients de l'équation de la courbe n'étant alors liés entre eux que par le moindre nombre possible de conditions. En d'autres termes, nous voulons déterminer la courbe la plus générale de degré m, dont la quadrature serait algébrique.

23. *D'une réduction accessoire d'une nouvelle unité dans le nombre des périodes de la quadratrice, au moment de la formation d'un point double à distance finie dans la courbe correspondante.* — Cette réduction se produit nécessairement au moment de la formation d'un point double qui fait évanouir la représentation géométrique d'une période, parce que deux anneaux, entre lesquels était compris celui qui vient de se réduire à un point unique, viennent se confondre en un seul circuit, en forme de huit, où il n'est plus possible de distinguer les deux anneaux l'un de l'autre, la condition

de continuité obligeant le point décrivant $[x, y]$ à parcourir les deux boucles en avançant toujours dans le même sens.

Il suffira d'établir le fait dans le cas le plus général, parce que les périodes de la quadratrice de la courbe la plus générale de degré m devant, dans tous les cas particuliers, rester les mêmes fonctions des coefficients, si

Fig 20.



l'on peut constater, dans un cas absolument général, que la formation d'un point double entraîne la disparition de deux périodes dans la quadratrice, on pourra conclure à la même coïncidence dans tous les cas particuliers.

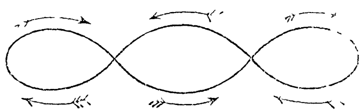
Supposons que la courbe ait toutes ses asymptotes réelles et que ce soit un anneau fermé de la courbe réelle qui doive s'évanouir : menons à cet anneau deux tangentes parallèles qui n'aient la direction d'aucune asymptote : les conjuguées du lieu qui toucheront l'anneau considéré aux points de contact des deux tangentes parallèles seront nécessairement fermées, quelque loin qu'ils s'étendent d'ailleurs, parce que la conjuguée à laquelle ils appartiendront, n'ayant pas d'asymptotes, n'aura pas de branches infinies; les produits par $\sqrt{-1}$ des aires de ces deux anneaux formeront deux périodes imaginaires de la quadratrice du lieu.

Mais au moment où l'anneau de la courbe réelle s'évanouira en un point isolé, les deux anneaux de la conjuguée se rejoindront au point isolé et s'y couperont sous un angle, au lieu de s'y toucher, de sorte que les deux périodes, précédemment distinctes, se fondront en une seule égale à leur différence.

Il en serait évidemment de même si l'anneau qui devrait s'évanouir appartenait à une conjuguée et était, au contraire, compris entre deux anneaux fermés de la courbe réelle. Seulement les deux tangentes à la courbe au point double seraient alors réelles, au lieu d'être imaginaires.

Ainsi la formation d'un point double doit entraîner une réduction de deux unités dans le nombre des périodes. Le même fait, au reste, se reproduirait dans les mêmes conditions si, un huit s'étant déjà produit, il se formait un nouveau point double sur son pourtour. Seulement, au lieu de deux boucles, il s'en présenterait trois, en continuité entre elles.

Fig. 21



Les trois boucles seraient, en tous cas, de même nature, c'est-à-dire toutes les trois réelles ou toutes les trois imaginaires.

En résumé, on doit admettre que la formation de p points doubles dans une courbe entraîne une réduction de $2p$ unités dans le nombre des périodes de sa quadratrice.

24. *Des autres conditions dans lesquelles peuvent se produire des réductions dans le nombre des périodes.* – D'autres réductions peuvent être amenées par beaucoup d'autres circonstances : ainsi une période représentée par l'aire d'un anneau en forme de *huit* disparaîtra lorsque les aires des deux boucles seront égales ; deux

périodes représentées par les aires des deux anneaux fermés de la courbe réelle se réduiront à une seule si ces aires sont égales, et il en sera de même si les anneaux fermés de conjuguées, compris entre des branches distinctes de la courbe réelle, présentent la même aire, etc.

C'est ainsi, par exemple, que la quadratrice de la courbe

$$y^4 + x^4 = a^4$$

ne comporte que deux périodes $\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\omega}{2}\sqrt{-1}$, ω désignant l'aire de l'anneau de la courbe réelle, compris entre les droites $x = \pm a$ et $y = \pm a$. Mais aussi, dans cet exemple, la courbe réelle, ses conjuguées à abscisses et à ordonnées réelles, et l'enveloppe imaginaire de ses conjuguées se confondent géométriquement.

Mais dans ces dernières circonstances, la disparition de chaque période manquante tiendra à la présence d'une relation particulière entre les coefficients de l'équation de la courbe, tandis que la relation unique qui introduit chaque point double entraîne une réduction de deux unités dans le nombre des périodes, de sorte qu'à égalité dans le nombre des périodes restantes, la courbe dont l'équation contiendra encore le plus de paramètres indépendants sera celle pour laquelle la disparition des périodes manquantes sera déterminée exclusivement par la formation de points doubles en nombre suffisant, c'est-à-dire en nombre p, s'il a disparu $2p$ périodes.

25. *Du nombre maximum de points doubles et du nombre maximum de périodes non cycliques.* — Si une courbe de degré m se résout en deux autres, l'une de degré $(m-q)$, et l'autre de degré q, n'ayant ni l'une ni l'autre de points doubles, le nombre des points doubles de la courbe composée sera

$$q(m-q)$$

si à son tour la courbe de degré q se résout en deux autres, de degrés $(q-r)$ et r, n'ayant pas de points doubles, la courbe décomposée présentera

$$(m-q)(q-r)+(m-q)r+r(q-r)=(m-q)q+r(q-r)$$

points doubles.

Il en résulte que, plus une courbe de degré m se segmente en courbes de degrés moindres, n'ayant pas de points doubles, plus elle présente de points doubles.

Le nombre maximum de points doubles que puisse présenter une courbe de degré m correspond donc au cas où elle dégénère en m droites, et ce nombre est

$$\frac{m(m-1)}{2}.$$

Il reste alors $2m$ coefficients indépendants dans l'équation de la courbe, au lieu de

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1;$$

les coefficients de la courbe satisfont donc alors à

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1-2m=\frac{m(m-1)}{2}$$

conditions.

Mais de ces $\frac{m(m-1)}{2}$ conditions, il y en a $(m-1)$ qui expriment que les m périodes cycliques sont nulles, puisqu'elles le sont en effet, et les

$$\frac{m(m-1)}{2}-(m-1)=\frac{(m-2)(m-1)}{2}$$

autres expriment chacune la présence d'un point double dans la courbe.

Si l'on supprimait les $(m-1)$ conditions qui expriment que les m périodes cycliques sont nulles, lesquelles peuvent s'exprimer à part, les $\frac{(m-2)(m-1)}{2}$ conditions restantes exprimeraient encore la présence d'autant de points doubles, et, les $(m-1)$ premières étant retirées, la courbe redeviendrait irréductible.

Donc le nombre maximum de points doubles d'une courbe irréductible de degré m est

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

et, par conséquent, la quadratrice de la courbe la plus générale de degré m comporte

$$(m-1)(m-2)$$

périodes non cycliques, et, si l'on rajoute les $(m-1)$ périodes cycliques, on obtient $(m-1)^2$ pour le nombre total des périodes de toute nature.

On conclut de cette théorie :

1° Qu'une courbe de degré m, qui présente

$$\frac{(m-2)(m-1)}{2}$$

points doubles et que toutes ses asymptotes coupent chacune en trois points situés à l'infini est quarrable algébriquement ;

Qu'une courbe de degré m qui présente

$$\frac{(m-2)(m-1)}{2}$$

points doubles, mais dont les asymptotes sont quelconques, est quarrable par les fonctions circulaires inverses ou par les fonctions logarithmiques ;

Qu'une courbe de degré m qui présente

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}-1$$

points doubles est quarrable par les fonctions circulaires inverses et par les fonctions doublement périodiques;

2° Que la courbe la plus générale de degré m, quarrable algébriquement, est celle qui présente

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

points doubles et que ses asymptotes coupent chacune en trois points à l'infini;

Que la courbe la plus générale de degré m, quarrable par les fonctions circulaires inverses, est celle qui présente $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles;

Que la courbe la plus générale de degré m, quarrable par les fonctions circulaires inverses et par les fonctions doublement périodiques, est celle qui présente

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}-1$$

points doubles, etc.

Mais il ne faudrait pas conclure, du mode de quadrabilité d'une courbe, au nombre de ses points doubles, parce que, comme nous l'avons dit, le nombre des périodes peut se réduire dans toutes sortes de circonstances. Ainsi la courbe $y^4+x^4=a^4$ est quarrable par les fonctions à deux périodes, c'est-à-dire par les fonctions elliptiques, et cependant elle ne présente aucun point double. (*A suivre.*)