

WORONTZOFF

Sur le développement des intégrales en séries

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 10
(1891), p. 158-162

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1891_3_10__158_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE DEVELOPPEMENT DES INTEGRALES EN SÉRIES ;

PAR M. WORONTZOFF.

En posant

$$\int F(x) dx = \Phi(x) + C,$$

on a

$$\begin{aligned} \int_{a_0+b,m}^{a+bm} F(x) dx &= \Phi(a+bm) - \Phi(a_0+b_0m) = f(m) - \Phi(a) + \Phi(a_0) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(bm)^k}{1.2.3\dots k} \Phi^{(k)}(a) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b_0m)^k}{1.2.3\dots k} \Phi^{(k)}(a_0) + h, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} h &= \frac{(1-0)^{n-1} m^n}{1.2.3\dots(n-1)} f^{(n)}(0m) \\ &\quad - \frac{(1-0)^{n-1} m^n}{1.2.3\dots(n-1)} [b^n \Phi^{(n)}(a+b_0m) - b_0^n \Phi^{(n)}(a_0+b_0m)] \\ &= \frac{1}{1.2.3\dots(n-1)} \left[\int_0^{bm} \Phi^{(n)}(a+bm-z) z^{n-1} dz \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{b_0m} \Phi^{(n)}(a_0+b_0m-z) z^{n-1} dz \right] \end{aligned}$$

Comme

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \int_a^x \Gamma(r) dr \quad \Phi^{(l)}(x) = F^{(l-1)}(x).$$

on obtient, en prenant $m = 1$,

$$\begin{aligned}
 \int_{a_0+b_0}^{a+b} F(x) dx &= \int_{a_0}^a F(x) dx + \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{b^k}{1.2.3\dots k} F^{(k-1)}(a) \\
 &\quad - \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{b_0^k}{1.2.3\dots k} F^{(k-1)}(a_0) - h_0 \\
 &\quad - \int_{b_0}^b F(x) dx - \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{a^k}{1.2.3\dots k} F^{(k-1)}(b) \\
 &\quad - \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{a_0^k}{1.2.3\dots k} F^{(k-1)}(b_0) + h'_0, \\
 (a) \quad h_0 &= \frac{(1-0)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} [b^n F^{(n-1)}(a+0b) - b_0^n F^{(n-1)}(a_0+0b_0)] \\
 &= \frac{1}{1.2.3\dots(n-1)} \left[\int_0^b F^{(n-1)}(a-b-z) z^{n-1} dz \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{b_0} F^{(n-1)}(a_0-b_0-z) z^{n-1} dz \right], \\
 h'_0 &= \frac{(1-0)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} [a^n F^{(n-1)}(b-0a) - a_0^n F^{(n-1)}(b_0-0a_0)] \\
 &= \frac{1}{1.2.3\dots(n-1)} \left[\int_0^a F^{(n-1)}(a-b-z) z^{n-1} dz \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{a_0} F^{(n-1)}(a_0+b_0-z) z^{n-1} dz \right].
 \end{aligned}$$

Cette formule, pour $a + b = a_0 + b_0 = c$, donne

$$\begin{aligned}
 \int_{a_0}^a F(x) dx &= \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(-1)^{k-1} (a-c)^k}{1.2.3\dots k} F^{(k-1)}(a) \\
 &\quad - \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(-1)^{k-1} (a_0-c)^k}{1.2.3\dots k} F^{(k-1)}(a_0) - h_1, \\
 (1) \quad h_1 &= (-1)^{n-1} \frac{1-0)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} \{ (a-c)^n F^{(n-1)}[a+0(c-a)] \\
 &\quad - (a_0-c)^n F^{(n-1)}[a_0+0(c-a_0)] \}_1 \\
 &= \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} \int_{a_0}^a F^{(n-1)}(z)(z-c)^{n-1} dz \quad (1);
 \end{aligned}$$

) Nous supposons ici que les fonctions $F(x)$, $F'(x)$, ..., $F^{(n-1)}(x)$ sont finies

d'où l'on déduit, pour $c = a + a_0$ ($b = a_0$, $b_0 = a$),

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \int_{a_0}^a F(x) dx &= \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{a^k}{1.2.3 \dots k} F^{(k-1)}(a_0) \\ &- \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{a_0^k}{1.2.3 \dots k} F^{(k-1)}(a) + h_2, \\ h_2 &= \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} \\ &\times [a^n F^{(n-1)}(a_0 + \theta a) - a_0^n F^{(n-1)}(a + \theta a_0)] \\ &= \int_{a_0}^a F^{(n-1)}(z) \frac{(a + a_0 - z)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} dz, \end{aligned} \right.$$

et pour $c = 0$,

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \int_{a_0}^a F(x) dx &= \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{1.2.3 \dots k} a^k F^{(k-1)}(a) \\ &- \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{1.2.3 \dots k} a_0^k F^{(k-1)}(a_0) + h_3, \\ &\text{(Théorème de Bernoulli.)} \\ h_3 &= (-1)^{n-1} \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} \\ &\times [a^n F^{(n-1)}(\theta a) - a_0^n F^{(n-1)}(\theta a_0)] \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} \int_{a_0}^a F^{(n-1)}(z) z^{n-1} dz. \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose, dans la formule (a), $b = b_0 = c$, on trouve

$$\int_{a_0+c}^{a+c} F(x) dx = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(a^k - a_0^k)}{1.2.3 \dots k} F^{(k-1)}(c) + h,$$

et continues entre $x = a_0$ et $x = c$ aussi entre $x = a$ et $x = c$. par suite entre $x = a$ et $x = a_0$.

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} [a^n F^{(n-1)}(c + \theta a) - a_0^n F^{(n-1)}(c + \theta a_0)] \\
 &= \frac{1}{1.2.3 \dots (n-1)} \left[\int_0^a F^{(n-1)}(a + c - z) z^{n-1} dz \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{a_0} F^{(n-1)}(a_0 + c - z) z^{n-1} dz \right],
 \end{aligned}$$

ou, en mettant $a - c$ et $a_0 - c$ au lieu de a et a_0 ,

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{aligned}
 \int_{a_0}^a F(x) dx &= \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{[(a-c)^k - (a_0-c)^k]}{1.2.3 \dots k} F^{(k-1)}(c) + h_4 \\
 &= \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} \left\{ (a-c)^n F^{(n-1)}[c + \theta(a-c)] \right. \\
 &\quad \left. - (a_0-c)^n F^{(n-1)}[c + \theta(a_0-c)] \right\}, \\
 h_4 &= \frac{1}{1.2.3 \dots (n-1)} \\
 &\quad \times \left[\int_0^{a-c} F^{(n-1)}(a-z) z^{n-1} dz \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{a_0-c} F^{(n-1)}(a_0-z) z^{n-1} dz \right]^{(1)}.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

En faisant successivement dans cette série $c = a_0$ et $c = 0$, on obtient les formules bien connues

$$\begin{aligned}
 \int_{a_0}^a F(x) dx &= \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(a-a_0)^k}{1.2.3 \dots k} F^{(k-1)}(a_0) + h_5, \\
 h_5 &= \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} (a-a_0)^n F^{(n-1)}[a_0 + \theta(a-a_0)] \\
 &= \frac{1}{1.2.3 \dots (n-1)} \int_0^{a-a_0} F^{(n-1)}(a-z) z^{n-1} dz;
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

d'où, pour $n = 1$, si $F(x)$ est une fonction finie et continue entre $x = a_0$ et $x = a$,

$$\int_{a_0}^a F(x) dx = (a - a_0) F[a_0 + \theta(a - a_0)]$$

(¹) Les fonctions $F(x)$, $F'(x)$, ..., $F^{(n-1)}(x)$ sont supposées finies et continues entre $x = c$ et $x = a_0$, aussi entre $x = c$ et $x = a$, par suite entre $x = a_0$ et $x = a$.

et

$$(6) \quad \int_{a_0}^a F(x) dx = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(a^k - a_0^k)}{1.2.3 \dots k} F^{(k-1)}(0) + h_6,$$

$$h_6 = \frac{(1-0)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} [a^n F^{(n-1)}(0) - a_0^n F^{(n-1)}(0)]$$

$$= \frac{1}{1.2.3 \dots (n-1)} \left[\int_0^a F^{(n-1)}(a-z) z^{n-1} dz - \int_0^{a_0} F^{(n-1)}(a_0-z) z^{n-1} dz \right];$$

d'où, pour $n = 1$,

$$\int_{a_0}^a F(x) dx = a F(0) - a_0 F(0) = \int_0^a F(x) dx - \int_0^{a_0} F(x) dx$$

Remarque. — Si l'on applique la formule

$$\int_0^a F(x) dx = a F(0)$$

aux intégrales

$$h_n = \frac{1}{1.2.3 \dots (n-1)} \int_0^a f^{(n)}(a_0 + a - x) x^{n-1} dx$$

$$= \frac{1}{1.2.3 \dots n} \int_0^{a^n} f^{(n)}\left(a_0 + a - y^{\frac{1}{n}}\right) dy$$

$$= \frac{1}{1.2.3 \dots (n-1)q} \int_0^{a^q} f^{(n)}\left(a_0 + a - z^{\frac{1}{q}}\right) q \sqrt[n]{z^{n-q}} dz$$

où

$$x = y^{\frac{1}{n}} = z^{\frac{1}{q}}, \quad F(x) = f^{(n)}(a_0 + a - x) x^{n-1},$$

$$[a F(0) - a f^{(n)}(a_0 + a - 0) (0)^{n-1} = a^n (1 - 0_1)^{n-1} f^{(n)}(a_0 + 0_1 a)]$$

on obtient

$$h_n = \frac{(1-0)^{n-1} a^n}{1.2.3 \dots (n-1)} f^{(n)}(a_0 + 0_1 a)$$

$$= \frac{a^n}{1.2.3 \dots n} f^{(n)}(a_0 + 0 a)$$

$$= \frac{(1-0_2)^{n-q} a^n}{1.2.3 \dots (n-1)q} f^{(n)}(a_0 + 0_2 a)$$